POLITEXT

Xavier Oliver Olivella
Carlos Agelet de Saracíbar Bosch

Mecánica de medios continuos para ingenieros

EDICIONS UPC

POLITEXT 92

Mecánica de medios continuos para ingenieros

POLITEXT

Xavier Oliver Olivella
Carlos Agelet de Saracíbar Bosch

Mecánica de medios continuos para ingenieros

Compilación:
Eduardo Vieira Chaves
Eduardo Car

EDICIONS UPC

Primera edición: septiembre de 2000
Segunda edición: enero de 2002
Reimpresión: febrero de 2010

Diseño de la cubierta: Manuel Andreu

© Los autores, 2000

© Edicions UPC, 2000
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL
Jordi Girona Salgado 1-3, 08034 Barcelona
Tel.: 934 137 540 Fax: 934 137 541
Edicions Virtuals: www.edicionsupc.es
E-mail: edicions-upc@upc.es

Producción: EDUGRAF S.L.
Diputación, 343
08009 Barcelona

Depósito legal: B-35650-2005
ISBN: 978-84-9880-217-7

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org http://www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

Índice

1 Descripción del movimiento

1.1	Definición de medio continuo	1
1.2	Ecuaciones de movimiento	1
1.3	Descripciones del movimiento	5
1.4	Derivadas temporales: local, material, convectiva	7
1.5	Velocidad y aceleración	9
1.6	Estacionariedad	12
1.7	Trayectoria	13
1.8	Línea de corriente	15
1.9	Tubo de corriente	17
1.10	Línea de traza	18
1.11	Superficie material	20
1.12	Superficie de control	22
1.13	Volumen material	23
1.14	Volumen de control	24

2 Descripción de la deformación

2.1	Introducción	25
2.2	Tensor gradiente de deformación	25
2.3	Desplazamientos	28
2.4	Tensores de deformación	30
2.5	Variación de las distancias: Estiramiento. Alargamiento unitario	33
2.6	Variación de ángulos	36
2.7	Interpretación física de los tensores de deformación	38
2.8	Descomposición polar	42
2.9	Variación de volumen	44
2.10	Variación del área	46
2.11	Deformación infinitesimal	47
2.12	Deformación volumétrica	56
2.13	Velocidad de deformación	58
2.14	Derivadas materiales de los tensores de deformación y otras magnitudes	62

2.15 Movimientos y deformaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas 65

3 Ecuaciones de compatibilidad

3.1 Introducción 71
3.2 Ejemplo preliminar: Ecuaciones de compatibilidad de un campo vectorial potencial 72
3.3 Condiciones de compatibilidad para las deformaciones infinitesimales 74
3.4 Integración del campo de deformaciones infinitesimales 77
3.5 Ecuaciones de compatibilidad e integración del tensor velocidad de deformación 82

4 Tensión

4.1 Fuerzas másicas y superficiales 83
4.2 Postulados de Cauchy 86
4.3 Tensor de tensiones 88
4.4 Propiedades del tensor de tensiones 96
4.5 Tensor de tensiones en coordenadas curvilineas ortogonales 103
4.6 Círculo de Mohr en 3 dimensiones 105
4.7 Círculo de Mohr en 2 dimensiones 110
4.8 Círculos de Mohr para casos particulares 122

5 Ecuaciones de conservación-balance

5.1 Postulados de conservación-balance 125
5.2 Flujo por transporte de masa o flujo colectivo 125
5.3 Derivada local y derivada material de una integral de volumen 129
5.4 Conservación de la masa. Ecuación de continuidad 134

5.5 Ecuación de balance. Teorema del transporte de Reynolds 136
5.6 Expresión general de las ecuaciones de balance 138
5.7 Balance de la cantidad de movimiento 141
5.8 Balance del momento de la cantidad de movimiento (momento angular) 143
5.9 Potencia 146
5.10 Balance de la energía 151
5.11 Procesos reversibles e irreversibles 157
5.12 Segundo principio de la termodinámica. Entropía 159
5.13 Ecuaciones de la mecánica de medios continuos. Ecuaciones constitutivas 166

6 Elasticidad lineal

6.1 Hipótesis de la Teoría de la Elasticidad Lineal 169
6.2 Ecuación constitutiva elástica lineal. Ley de Hooke generalizada 171
6.3 Isotropía - Constantes de Lamé- Ley de Hooke para elasticidad lineal isótropa 174
6.4 Ley de Hooke en componentes esféricas y desviadoras 176
6.5 Limitaciones en los valores de las propiedades elásticas 178
6.6 Planteamiento del problema elástico lineal 180
6.7 Resolución del problema elástico lineal 185
6.8 Unicidad de la solución del problema elástico lineal 188
6.9 Principio de Saint-Venant 193
6.10 Termoelasticidad lineal. Tensiones y deformaciones térmicas 195
6.11 Analogías térmicas 198
6.12 Principio de superposición en termoelasticidad lineal 208
6.13 Ley de Hooke en función de los “vectores” de tensión y deformación 212

7 Elasticidad lineal plana

7.1 Introducción 215
7.2 Estado de tensión plana 215
7.3 Deformación plana 219
7.4 El problema elástico lineal en elasticidad bidimensional 222
7.5 Problemas asimilables a elasticidad bidimensional 223
7.6 Curvas representativas de los estados planos de tensión 226

8 Plasticidad

8.1 Introducción 233
8.2 Nociones previas 233
8.3 Espacio de tensiones principales 237
8.4 Modelos reológicos de fricción 242
8.5 Comportamiento fenomenológico elastoplástico 251
8.6 Teoría incremental de la plasticidad en una dimensión 253
8.7 Plasticidad en tres dimensiones 260
8.8 Superficies de fluencia. Criterios de fallo 261

9 Ecuaciones constitutivas en fluidos

9.1 Concepto de presión 273
9.2 Ecuaciones constitutivas en mecánica de fluidos 276
9.3 Ecuaciones constitutivas (mecánicas) en fluidos viscosos 277
9.4 Ecuaciones constitutivas (mecánicas) en fluidos newtonianos 277

10 Mecánica de fluidos

10.1 Ecuaciones del problema de mecánica de fluidos 285

10.2 Hidrostática. Fluidos en reposo 287
10.3 Dinámica de fluidos:fluidos perfectos barotrópicos 293
10.4 Dinámica de fluidos:fluidos viscosos (newtonianos) 303
10.5 Condiciones de contorno en la mecánica de fluidos 309
10.6 Flujo laminar y flujo turbulento 313

11 Principios variacionales

11.1 Preliminares 317
11.2 Principio (Teorema) de los trabajos virtuales 323
11.3 Energía potencial. Principio de minimización de la energía potencial 328

Bibliografía 331

Presentación

Este texto nace con la vocación de ser una herramienta para la formación de los ingenieros en la mecánica de medios continuos. De hecho, es el fruto de la experiencia de muchos años en la enseñanza de dicha disciplina en la Escuela de Ingenieros de Caminos de la Universitat Politécnica de Catalunya, tanto en cursos de grado (titulaciones de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos e Ingeniería Geológica) como de postgrado (cursos de Máster y de Doctorado).
A diferencia de otros textos de introducción a la mecánica de medios continuos, el que aquí se presenta está específicamente orientado a la ingeniería, intentando mantener un adecuado equilibrio entre la rigurosidad de la formulación matemática utilizada y la claridad de los principios físicos tratados, aunque poniendo en todo momento lo primero al servicio de lo segundo. En este sentido, en las imprescindibles operaciones vectoriales y tensoriales se utilizan simultáneamente tanto la notación indicial (de más utilidad para la demostración matemática rigurosa) como la notación compacta (en la que se vislumbra con más claridad la física del problema), aunque a medida que se avanza en el texto existe una clara tendencia hacia la notación compacta en un intento de focalizar la atención del lector en la componente física de la mecánica de medios continuos.

El contenido del texto está claramente dividido en dos partes que se presentan secuencialmente. En la primera parte (capítulos 1 a 5) se introducen los aspectos fundamentales y descriptivos comunes a todos los medios continuos (movimiento, deformación, tensión y ecuaciones de conservación-balance). En la segunda (capítulos 6 a 11) se estudian familias específicas de medios continuos, como son los sólidos y los fluidos, en un planteamiento que comienza con la correspondiente ecuación constitutiva y termina con las formulaciones clásicas de la mecánica de sólidos (elásticos-lineales y elasto-plásticos) y de la mecánica de fluidos (régimen laminar). Finalmente, se hace una breve incursión en los principios variacionales (principio de las trabajos virtuales y de minimización de la energía potencial) como ingredientes de partida en la resolución de problemas de mecánica de medios continuos mediante métodos numéricos. Esta estructura permite la utilización del texto con propósitos docentes tanto en un único curso de alrededor de 100 horas lectivas como en dos cursos diferenciados: el primero basado en los primeros cinco capítulos y dedicado a la introducción de los fundamentos de la mecánica de medios continuos y el segundo específicamente dedicado a la mecánica de sólidos y la mecánica de fluidos.

Finalmente, los autores quieren expresar su agradecimiento al Ingeniero Eduardo Vieira Chaves y al Dr. Eduardo Car por el esmerado trabajo de compilación de una primera versión de este texto a partir de las notas de clase y personales de los autores. Asimismo, desean agradecer al Profesor Ramón Codina sus oportunas sugerencias y correcciones sobre las primeras versiones del texto.

Barcelona, Septiembre de 2000

Xavier Oliver Olivella
y
Carlos Agelet de Saracíbar Bosch

1 Descripción del movimiento

1.1 Definición de medio continuo

Se entiende por *Medio Continuo* un conjunto infinito de partículas (que forman parte, por ejemplo, de un sólido, de un fluido o de un gas) que va a ser estudiado macroscópicamente, es decir, sin considerar las posibles discontinuidades existentes en el nivel microscópico (nivel atómico o molecular). En consecuencia, se admite que no hay discontinuidades entre las partículas y que la descripción matemática de este medio y de sus propiedades se puede realizar mediante funciones continuas.

1.2 Ecuaciones del movimiento

La descripción más elemental del movimiento del Medio Continuo puede llevarse a cabo mediante funciones matemáticas que describan la posición de cada partícula a lo largo del tiempo. En general, se requiere que éstas funciones y sus derivadas sean continuas.

Se supone que el medio continuo está formado por infinitas partículas (*puntos materiales*) que ocupan diferentes posiciones del espacio físico durante su movimiento a lo largo del tiempo (ver Figura 1-1). Se define como *configuración* del medio continuo en el instante *t*, que se denota por Ω_t, el lugar geométrico de las posiciones que ocupan en el espacio los puntos materiales (partículas) del medio continuo en dicho instante.

Definiciones:

Punto espacial: Punto fijo en el espacio.

Punto material: Una partícula. Puede ocupar distintos puntos espaciales en su movimiento a lo largo del tiempo.

Configuración: Lugar geométrico de las posiciones que ocupan en el espacio las partículas del medio continuo para un cierto instante t.

NOTA

En general se tomará el instante $t_0 = 0$ como instante de referencia.

A un cierto instante $t = t_0$ del intervalo de tiempo de interés se le denomina *instante de referencia* y a la configuración en dicho instante Ω_0 se la denomina configuración *inicial, material o de referencia.*

NOTACIÓN

Se utilizarán indistintamente las notaciones (X,Y,Z) y (X_1,X_2,X_3) para designar al sistema de coordenadas cartesianas.

Consideremos ahora el sistema de coordenadas cartesianas (X,Y,Z) de la Figura 1-1 y la correspondiente base ortonormal $(\hat{\mathbf{e}}_1,\hat{\mathbf{e}}_2,\hat{\mathbf{e}}_3)$. En la configuración de referencia Ω_0 el vector de posición $\mathbf{X}$ de una partícula que ocupa un punto P en el espacio (en el instante de referencia) viene dado por:

$$\mathbf{X} = X_1\hat{\mathbf{e}}_1 + X_2\hat{\mathbf{e}}_2 + X_3\hat{\mathbf{e}}_3 = X_i\hat{\mathbf{e}}_i \tag{1.1}$$

NOTACIÓN

En el resto de este texto se utilizará la *notación de Einstein* o de *índices repetidos*. *Toda repetición de un índice en un* mismo *monomio de una expresión algebraica supone el sumatorio respecto a dicho índice*. Ejemplos:

$$\sum_{i=1}^{i=3} X_i\hat{\mathbf{e}}_i \overset{not}{=} X_i\hat{\mathbf{e}}_i$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} a_{ik}b_{kj} \overset{not}{=} a_{ik}b_{kj}$$

$$\sum_{i=1}^{i=3}\sum_{j=1}^{j=3} a_{ij}b_{ij} \overset{not}{=} a_{ij}b_{ij}$$

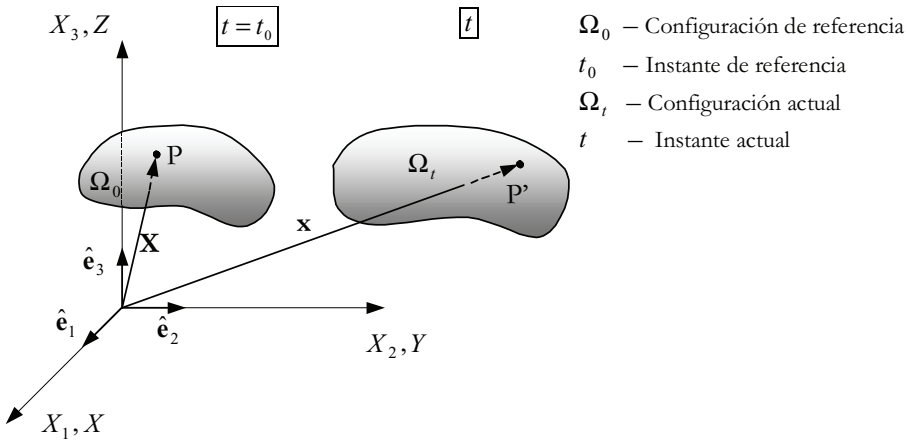


Figura 1-1 – Configuraciones del medio continuo

donde a las componentes (X_1,X_2,X_3) se las denomina *coordenadas materiales* (de la partícula).

NOTACIÓN

Se distingue aquí entre el vector (ente físico) $\mathbf{X}$ y su vector de componentes $[\mathbf{X}]$. Frecuentemente se obviará esta distinción

$$[\mathbf{X}] = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \overset{def}{=} \text{coordenadas materiales} \tag{1.2}$$

NOTACIÓN

Siempre que sea posible, se denotará con letras mayúsculas a las variables que se refieran a la configuración de referencia Ω_0 y con letras minúsculas a las variables referidas a la configuración actual Ω_t

En la configuración actual Ω_t, la partícula situada originalmente en el punto material P (ver Figura 1-1) ocupa el punto espacial P' y su vector de posición $\mathbf{x}$ viene dado por:

$$\mathbf{x} = x_1\hat{\mathbf{e}}_1 + x_2\hat{\mathbf{e}}_2 + x_3\hat{\mathbf{e}}_3 = x_i\hat{\mathbf{e}}_i \tag{1.3}$$

donde a (x_1,x_2,x_3) se las denomina *coordenadas espaciales* de la partícula en el instante de tiempo t.

$$[\mathbf{x}] = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \overset{def}{=} \text{coordenadas espaciales} \tag{1.4}$$

El movimiento de las partículas del medio continuo puede describirse ahora por la evolución de sus coordenadas espaciales (o de su vector de posición) a lo largo del tiempo. Matemáticamente esto requiere conocer una función que para cada partícula (identificada por una *etiqueta*) proporcione sus coordenadas espaciales x_i (o su vector de posición espacial $\mathbf{x}$) en los sucesivos instantes de tiempo. Como etiqueta que caracteriza unívocamente a cada partícula pueden elegirse sus coordenadas materiales X_i obteniéndose las *ecuaciones del movimiento*:

NOTACIÓN

Con un cierto abuso de la notación se va a confundir frecuentemente la función con su imagen. Así las ecuaciones de movimiento se escribirán a menudo como $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ y sus inversas como $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$.

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = \varphi\ (\text{partícula}, t) = \varphi(\mathbf{X}, t) \overset{not}{=} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \\ &x_i = \varphi_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad i \in \{1,2,3\} \end{aligned} \tag{1.5}$$

que proporcionan las coordenadas espaciales en función de las materiales, y las *ecuaciones del movimiento inversas*:

$$\begin{aligned} &\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t) \overset{not}{=} \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \\ &X_i = \varphi_i^{-1}(x_1, x_2, x_3, t) \quad i \in \{1,2,3\} \end{aligned} \tag{1.6}$$

que proporcionan las coordenadas materiales en función de las espaciales.

Observación 1-1

Hay diferentes alternativas para elegir la etiqueta que caracteriza una partícula, aunque la opción de tomar sus coordenadas materiales es la más común. Cuando las ecuaciones del movimiento vienen dadas en función de las coordenadas materiales como etiqueta (como en la ecuación (1.5)), se hablará de las *ecuaciones de movimiento en forma canónica.*

Existen ciertas restricciones matemáticas para garantizar la existencia de φ y de φ^{-1} así como su correcto significado físico. Estas restricciones son:

- $\varphi(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$ puesto que, por definición, $\mathbf{X}$ es el vector de posición en el instante de referencia $t = 0$ (condición de consistencia).
- $\varphi \in C^1$ (la función φ es continua y con derivadas continuas en cada punto e instante).
- φ es biunívoca (para garantizar que dos partículas no ocupan simultáneamente el mismo punto del espacio y que una partícula no ocupa simultáneamente dos puntos distintos del espacio).
- El Jacobiano de la transformación $J = \det\left[\dfrac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}}\right] \overset{not}{=} \left|\dfrac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}}\right| > 0$.

La interpretación física de esta condición (que se estudiará más adelante) es que todo volumen diferencial ha de ser siempre positivo, o utilizando el *principio de conservación de la masa* (que se verá más adelante), la densidad de las partículas ha de ser siempre positiva.

RECORDATORIO

Se define el operador de dos índices Delta de Kronecker $\overset{not}{=} \delta_{ij}$ como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

El tensor unidad $\mathbf{1}$ de segundo orden se define entonces como $[\mathbf{1}]_{ij} = \delta_{ij}$

Observación 1-2

En el instante de referencia $t = 0$ resulta $\mathbf{x}(\mathbf{X},t)\big|_{t=0} = \mathbf{X}$. En consecuencia $x = X$, $y = Y$, $z = Z$ son las ecuaciones del movimiento en el instante de referencia y el Jacobiano en dicho instante resulta ser:

$$J(\mathbf{X},0) = \left|\frac{\partial(xyz)}{\partial(XYZ)}\right| = \det\left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right] = \det[\delta_{ij}] = \det \mathbf{1} = 1$$

Observación 1-3

La expresión $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X},t)$, particularizada para un valor fijo de las coordenadas materiales $\mathbf{X}$, proporciona la ecuación de la *trayectoria* de la partícula (ver Figura 1-2).

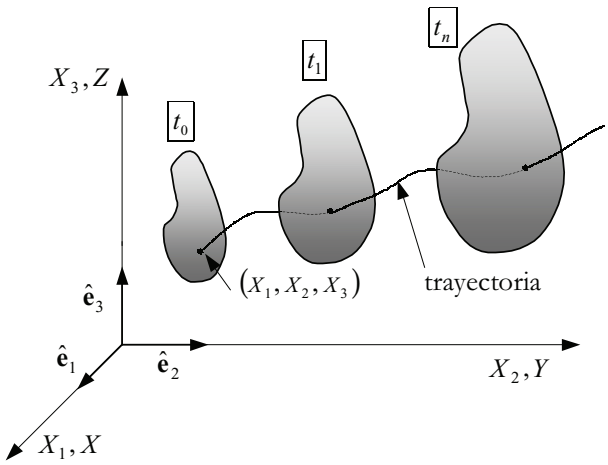


Figura 1-2 – Trayectoria de una partícula

Ejemplo 1-1 – *La descripción espacial del movimiento de un medio continuo viene dada por:*

$$\mathbf{x}(\mathbf{X},t) \equiv \begin{cases} x_1 = X_1\, e^{2t} \\ x_2 = X_2\, e^{-2t} \\ x_3 = 5\, X_1\, t + X_3\, e^{2t} \end{cases} \equiv \begin{cases} x = X\, e^{2t} \\ y = Y\, e^{-2t} \\ z = 5\, X\, t + Z\, e^{2t} \end{cases}$$

Obtener las ecuaciones del movimiento inversas.

El determinante del Jacobiano resulta:

$$J=\left|\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3}\\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3}\\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^{2t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-2t} & 0\\ 5t & 0 & e^{2t}\end{vmatrix}=e^{2t}\neq 0$$

La condición suficiente (aunque no necesaria) para que la función $x=\varphi(\mathbf{X},t)$ sea biunívoca (que exista la inversa) es que el determinante del Jacobiano de la función no sea nulo. Además puesto que el Jacobiano es positivo, el movimiento tiene sentido físico. Por lo tanto, la inversa de la descripción espacial dada existe y viene dada por:

$$\mathbf{X}=\varphi^{-1}(\mathbf{x},t)\equiv\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1e^{-2t}\\ x_2e^{2t}\\ x_3e^{-2t}-5tx_1e^{-4t}\end{bmatrix}$$

1.3 Descripciones del movimiento

La descripción matemática de las propiedades de las partículas del medio continuo puede hacerse mediante dos formas alternativas: la descripción *material* (generalmente utilizada en Mecánica de Sólidos) y la descripción *espacial* (utilizada generalmente en Mecánica de Fluidos). Ambas descripciones se diferencian esencialmente por el tipo de argumento (coordenadas materiales o coordenadas espaciales) que aparece en las funciones matemáticas que describen las propiedades del medio continuo.

1.3.1 Descripción material

NOTA

La literatura sobre el tema suele referirse también a la descripción material como *descripción lagrangeana* .

En la descripción material se describe cierta propiedad (por ejemplo la densidad ρ) mediante cierta función $\overline{\rho}(\bullet,t):R^3\times R^+\rightarrow R^+$ donde el argumento $(\bullet)$ en $\overline{\rho}(\bullet,t)$ son las coordenadas materiales. Es decir:

$$\rho=\overline{\rho}(\mathbf{X},t)=\overline{\rho}(X_1,X_2,X_3,t) \tag{1.7}$$

Obsérvese que si se fijan los tres argumentos $\mathbf{X}\equiv(X_1,X_3,X_3)$ de la ecuación (1.7) se está siguiendo a una partícula determinada (ver Figura 1-3a), de ahí proviene la denominación de descripción material

1.3.2 Descripción espacial

NOTA

Suele denominarse también a la descripción espacial como *descripción euleriana.*

En la descripción espacial la atención se centra en un punto del espacio. Se describe la propiedad como una función $\rho(\bullet,t):R^3\times R^+\rightarrow R^+$ del punto del espacio y del tiempo:

$$\rho=\rho(\mathbf{x},t)=\rho(x_1,x_2,x_3,t) \tag{1.8}$$

de tal forma que al asignar un cierto valor al argumento $\mathbf{x}$ en $\rho=\rho(\mathbf{x},t)$ se obtiene la evolución de la densidad para las *distintas* partículas que van pasando

por dicho punto del espacio a lo largo del tiempo (ver Figura 1-3b). Por otro lado, al fijar el argumento tiempo en la ecuación (1.8) se obtiene una distribución instantánea (como una *fotografía)* de la propiedad en el espacio. Es evidente que las ecuaciones del movimiento directas e inversas permiten pasar de una descripción a otra de la forma:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x},t) &= \rho(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t) = \overline{\rho}(\mathbf{X},t) \\ \overline{\rho}(\mathbf{X},t) &= \overline{\rho}(\mathbf{X}(\mathbf{x},t),t) = \rho(\mathbf{x},t) \end{aligned} \tag{1.9}$$

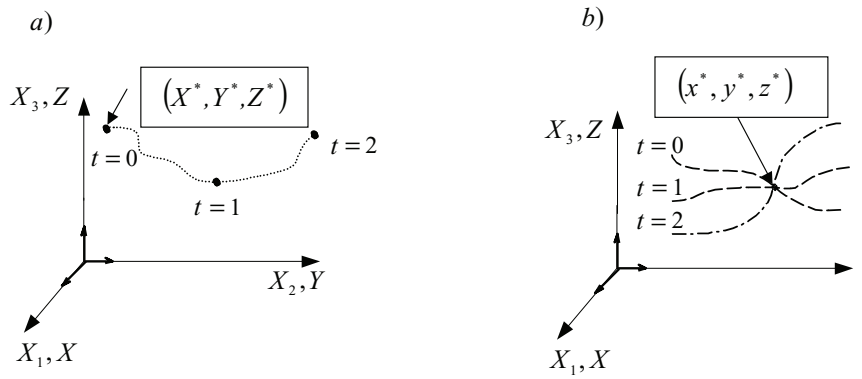


Figura 1-3– Descripción material y espacial de una propiedad

Ejemplo 1-2 – *Sean las siguientes ecuaciones del movimiento:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X},t) \equiv \begin{cases} x = X - Yt \\ y = Xt + Y \\ z = -Xt + Z \end{cases}$$

Obtener la descripción espacial de la propiedad descrita materialmente mediante

$$\overline{\rho}(X,Y,Z,t) = \frac{X + Y + Z}{1 + t^2}$$

Las ecuaciones del movimiento están dadas en forma canónica, ya que en la configuración de referencia Ω_0 se obtiene: $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{X},0) = \begin{cases} x = X \\ y = Y \\ z = Z \end{cases}$

El Jacobiano resulta: $J = \left| \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial X} & \dfrac{\partial x}{\partial Y} & \dfrac{\partial x}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial X} & \dfrac{\partial y}{\partial Y} & \dfrac{\partial y}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial X} & \dfrac{\partial z}{\partial Y} & \dfrac{\partial z}{\partial Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -t & 0 \\ t & 1 & 0 \\ -t & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + t^2 \neq 0$

y las ecuaciones del movimiento inversas están dadas por:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x},t) \equiv \begin{cases} X = \dfrac{x + yt}{1+t^2} \\ Y = \dfrac{y - xt}{1+t^2} \\ Z = \dfrac{z + zt^2 + xt + yt^2}{1+t^2} \end{cases}$$

Si ahora se considera la descripción material de la propiedad $\overline{\rho}(X,Y,Z,t) = \dfrac{X+Y+Z}{1+t^2}$ es posible hallar su descripción espacial sustituyendo en ella las ecuaciones del movimiento inversas. Es decir:

$$\overline{\rho}(X,Y,Z,t) \equiv \frac{x + yt + y + z + zt^2 + yt^2}{\left(1+t^2\right)^2} = \rho(x,y,z,t)$$

1.4 Derivadas temporales: local, material, convectiva

La consideración de las distintas descripciones (material y espacial) de las propiedades del medio continuo lleva a diversas definiciones de las derivadas temporales de dichas propiedades. Consideremos una cierta propiedad y sus descripciones material y espacial:

$$\Gamma(\mathbf{X},t) = \gamma(\mathbf{x},t) \tag{1.10}$$

donde el paso de la descripción espacial a la material y viceversa se hace a través de las ecuaciones del movimiento (1.5) y (1.6).

Definiciones:

Derivada local: La variación de la propiedad respecto al tiempo en un punto fijo del espacio. Si se dispone de la *descripción espacial* de la propiedad, $\gamma(\mathbf{x},t)$, dicha derivada local puede escribirse matemáticamente como:

$$\text{derivada local} \overset{not}{=} \frac{\partial \gamma(\mathbf{x},t)}{\partial t}$$

Derivada material: La variación de la propiedad respecto al tiempo siguiendo una partícula (punto material) específica del medio continuo. Si se dispone de la *descripción material* de la propiedad, $\Gamma(\mathbf{X},t)$, dicha derivada material puede describirse matemáticamente como:

$$\text{derivada material} \overset{not}{=} \frac{d}{dt}\Gamma = \frac{\partial \Gamma(\mathbf{X},t)}{\partial t}$$

NOTACIÓN

La notación $\dfrac{\partial(\bullet,t)}{\partial t}$ se entiende en el sentido clásico de derivada parcial respecto a la variable t.

Sin embargo, si se parte de la descripción espacial de la propiedad $\gamma(\mathbf{x},t)$ y se consideran implícitas en la misma las ecuaciones del movimiento:

$$\gamma(\mathbf{x},t)=\gamma(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)=\Gamma(\mathbf{X},t) \tag{1.11}$$

puede obtenerse la derivada material (siguiendo a una partícula) *a partir de la descripción espacial,* como:

$$\text{derivada material} \overset{\text{not}}{=} \frac{d}{dt}\gamma\big(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t\big)=\frac{\partial\Gamma(\mathbf{X},t)}{\partial t} \tag{1.12}$$

NOTACIÓN

En la literatura se utiliza frecuentemente la notación $\dfrac{D(\bullet)}{Dt}$ como alternativa a $\dfrac{d(\bullet)}{dt}$.

Desarrollando la ecuación (1.12) se obtiene:

$$\frac{d\gamma\big(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t\big)}{dt}=\frac{\partial\gamma(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}=\frac{\partial\gamma(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\frac{\partial\gamma}{\partial\mathbf{x}}\cdot\underbrace{\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t}}_{\mathbf{v}(\mathbf{x},t)} \tag{1.13}$$

donde se ha considerado la definición de la velocidad como la derivada respecto al tiempo de las ecuaciones de movimiento (1.5),

$$\frac{\partial\mathbf{x}(\mathbf{X},t)}{\partial t}=\mathbf{V}(\mathbf{X}(\mathbf{x},t),t)=\mathbf{v}(\mathbf{x},t) \tag{1.14}$$

La obtención de la derivada material a partir de la descripción espacial puede generalizarse para cualquier propiedad $\chi(\mathbf{x},t)$ (de carácter escalar, vectorial o tensorial):

NOTACIÓN

Se considera aquí la forma simbólica del operador *Nabla espacial*:

$\nabla\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_i}\hat{e}_i$

$$\underbrace{\frac{d\chi(\mathbf{x},t)}{dt}}_{\text{derivada material}}=\underbrace{\frac{\partial\chi(\mathbf{x},t)}{\partial t}}_{\text{derivada local}}+\underbrace{\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\chi(\mathbf{x},t)}_{\text{derivada convectiva}} \tag{1.15}$$

Observación 1-4

La ecuación (1.15) define implícitamente la *derivada convectiva* $\mathbf{v}\cdot\nabla(\bullet)$ como la diferencia entre las derivadas material y local de la propiedad. El término *convección* se aplica en Mecánica de Medios Continuos a fenómenos relacionados con el transporte de masa (o de partículas). Obsérvese que si no hay convección ($\mathbf{v}=0$) la derivada convectiva desaparece y las derivadas local y material coinciden.

Ejemplo 1-3 – *Dada la siguiente ecuación del movimiento*

$$\begin{cases} x=X+Yt+Zt \\ y=Y+2Zt \\ z=Z+3Xt \end{cases}$$

y la descripción espacial de una propiedad $\rho(\mathbf{x},t)=3x+2y+3t$, ca*lcular su derivada material.*

La descripción material de la propiedad se obtiene reemplazando las ecuaciones del movimiento en la expresión espacial:

$$\overline{\rho}(X,Y,Z,t)=3\big(X+Yt+Zt\big)+2\big(Y+2Zt\big)+3t=3X+3Yt+7Zt+2Y+3t$$

La derivada material puede obtenerse en primera instancia como la derivada respecto al tiempo en la descripción material, es decir:

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} = 3Y + 7Z + 3$$

Otra alternativa para el cálculo de la derivada material es utilizar el concepto de derivada material de la descripción espacial de la propiedad:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 3 \qquad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = (Y + Z, 2Z, 3X)^T \qquad \nabla \rho = \{3,2,0\}^T$$

Reemplazando en la expresión del operador derivada material se tiene:

$$\frac{d\rho}{dt} = 3 + 3Y + 7Z$$

Obsérvese que las expresiones de la derivada material de la propiedad obtenidas a partir de la descripción material, $\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t}$, o de la descripción espacial, $\frac{d\rho}{dt}$, coinciden.

1.5 Velocidad y aceleración

Definición:

V*elocidad*: Derivada temporal de las ecuaciones del movimiento.

La descripción material de la velocidad viene dada, en consecuencia, por:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{X},t) &= \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X},t)}{\partial t} \\ \mathrm{V}_i(\mathbf{X},t) &= \frac{\partial x_i(\mathbf{X},t)}{\partial t} \qquad i \in \{1,2,3\} \end{aligned} \tag{1.16}$$

y si se dispone de las ecuaciones inversas del movimiento $\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x},t)$ es posible obtener la descripción espacial de la velocidad como:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}(\mathbf{x},t),t) \tag{1.17}$$

Definición:

Aceleración: Derivada material del campo de velocidades.

Si se tiene la velocidad descrita en forma material, se puede hallar la descripción material de la aceleración como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{X},t)=\frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X},t)}{\partial t}$$
$$\mathrm{A}_{\mathrm{i}}(\mathbf{X},t)=\frac{\partial \mathrm{V}_{\mathrm{i}}(\mathbf{X},t)}{\partial t} \tag{1.18}$$

y a través de las ecuaciones inversas del movimiento $\mathbf{X}=\varphi^{-1}(\mathbf{x},t)$, se puede pasar a la descripción espacial $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)=\mathbf{A}(\mathbf{X}(\mathbf{x},t),t)$. Como alternativa, si se dispone de la descripción espacial de la velocidad, puede obtenerse directamente la descripción espacial de la aceleración aplicando la ecuación (1.15) para obtener la derivada material de $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x},t)=\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{dt}=\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x},t) \tag{1.19}$$

Ejemplo 1-4 – *Considérese un sólido, ver Figura 1-4, que gira con velocidad angular* ω *constante y que tiene como ecuación del movimiento:*

$$\begin{cases} x = R\ sin(\omega t+\phi) \\ y = R\ \cos(\omega t+\phi) \end{cases}$$

Hallar la velocidad y la aceleración del movimiento descritas en forma material y espacial.

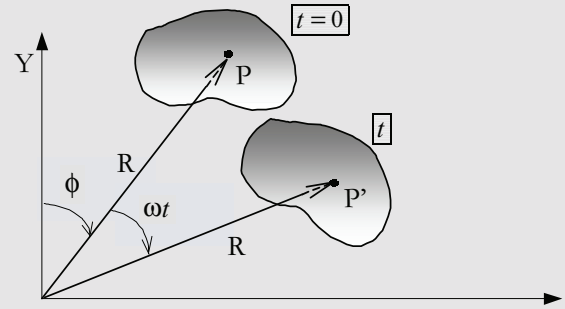


Figura 1-4

Las ecuaciones del movimiento pueden reescribirse como:

$$x = R\ sin(\omega t+\phi)=R\ sin(\omega t)\cos\phi+R\cos(\omega t)\,sin\phi$$
$$y = R\cos(\omega t+\phi)=R\cos(\omega t)\cos\phi-R\ sin(\omega t)\,sin\phi$$

y, ya que para $t=0\Rightarrow\begin{cases} X = R\ sin\phi \\ Y = R\ c\cos\phi \end{cases}$, las formas canónicas de la ecuación del movimiento y de su inversa quedan:

$$\begin{cases} x = X\ \cos(\omega t)+Y\ sin(\omega t) \\ y = -X\ \sin(\omega t)+Y\ \cos(\omega t) \end{cases} \qquad \begin{cases} X = x\ \cos(\omega t)-y\ sin(\omega t) \\ Y = x\ sin(\omega t)+y\ \cos(\omega t) \end{cases}$$

a.1) *Velocidad en descripción material*

$$\mathbf{V}(\mathbf{X},t)=\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X},t)}{\partial t}\equiv\begin{cases} V_x=\dfrac{\partial x}{\partial t}=-X\,\omega\,sin(\omega t)+Y\,\omega\cos(\omega t) \\ V_y=\dfrac{\partial y}{\partial t}=-X\,\omega\cos(\omega t)-Y\,\omega\,sin(\omega t) \end{cases}$$

a.2) *Velocidad en descripción espacial*

Sustituyendo los valores x e y dados en la forma canónica vista anteriormente, es posible obtener la forma espacial de la velocidad como:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=\left\{\begin{array}{l} \mathrm{v}_x=\dfrac{\partial x}{\partial t}=\omega\, y \\ \mathrm{v}_y=\dfrac{\partial y}{\partial t}=-\omega\, x \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{r} \omega\, y \\ -\omega\, x \end{array}\right\}$$

b.1) *Aceleración en descripción material:*

$$\mathbf{A}(\mathbf{X},t)=\frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X},t)}{\partial t}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{X},t)=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial t}=-X\omega^2\cos(\omega t)-Y\omega^2 sin(\omega t) \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial t}=X\omega^2 sin(\omega t)-Y\omega^2\cos(\omega t) \end{array}\right\}=-\omega^2\left\{\begin{array}{l} X\cos(\omega t)+Ysin(\omega t) \\ -Xsin(\omega t)+Y\cos(\omega t) \end{array}\right\}$$

b.2) *Aceleración en descripción espacial:*

Sustituyendo las ecuaciones del movimiento inversas en la ecuación anterior:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x},t)=\mathbf{A}(\mathbf{X}(\mathbf{x},t),t)\equiv\left\{\begin{array}{l} a_x=-\omega^2 x \\ a_y=-\omega^2 y \end{array}\right\}$$

Esta misma expresión podría ser obtenida si se considera la expresión de la velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ y la expresión de la derivada material en (1.15):

$$\mathbf{a}(\mathbf{x},t)=\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{dt}=\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\begin{array}{r} \omega y \\ -\omega x \end{array}\right\}+\left[\omega y \quad -\omega x\right]\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{array}\right]\left[\omega y \quad -\omega x\right]=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array}\right\}+\left[\omega y \quad -\omega x\right]\left[\begin{array}{ll} \dfrac{\partial}{\partial x}(\omega y) & \dfrac{\partial}{\partial x}(-\omega x) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(\omega y) & \dfrac{\partial}{\partial y}(-\omega x) \end{array}\right]=\left\{\begin{array}{l} -\omega^2 x \\ -\omega^2 y \end{array}\right\}$$

Obsérvese que el resultado obtenido por los dos procedimientos es idéntico.

1.6 Estacionariedad

Definición:

Una propiedad es *estacionaria* cuando su descripción espacial no depende del tiempo.

De acuerdo con la definición anterior y con el concepto de derivada local, toda propiedad estacionaria tiene su derivada local nula. Por ejemplo, si la velocidad para un cierto movimiento es estacionaria, puede ser descrita espacialmente como:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=\mathbf{v}(\mathbf{x})\Leftrightarrow\frac{\partial\mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t}=\mathbf{0} \tag{1.20}$$

Observación 1-5

La independencia del tiempo de la descripción espacial (estacionariedad) supone que para *un mismo punto del espacio* la propiedad en cuestión no varía a lo largo del tiempo. Esto no implica que, *para una misma partícula*, la propiedad no varíe con el tiempo (la descripción material puede depender del tiempo). Por ejemplo, si la velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ es estacionaria

$$\Rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\equiv\ \mathbf{v}(\mathbf{x})=\mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{X},t))=\mathbf{V}(\mathbf{X},t)$$

luego la descripción material de la velocidad depende del tiempo. Para un caso de densidad estacionaria (ver Figura 1-5) ocurrirá que para dos partículas de etiquetas $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ que varían su densidad a lo largo del tiempo, al pasar por un mismo punto espacial $\mathbf{x}$ (en dos instantes distintos t_1 y t_2) tomarán el mismo valor de la densidad ($\overline{\rho}(\mathbf{X}_1,t_1)=\overline{\rho}(\mathbf{X}_2,t_2)=\rho(\mathbf{x})$. Es decir, para un observador situado en el exterior del medio, la densidad en el punto fijo del espacio $\mathbf{x}$ será siempre la misma

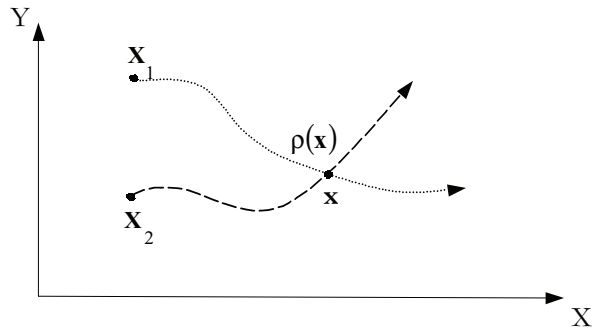


Figura 1-5– Movimiento con densidad estacionaria

Ejemplo 1-5 – En el Ejemplo 1-4 se tiene un campo de velocidades cuya descripción espacial es: $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \equiv \begin{Bmatrix} \omega y \\ -\omega x \end{Bmatrix}$. Es decir, se trata de un caso en que la descripción espacial de la velocidad no depende del tiempo y la velocidad es estacionaria. Es evidente que esto no implica que la velocidad de las partículas (que tienen un movimiento de *rotación uniforme* respecto al origen, con velocidad angular ω) no dependa del tiempo (ver Figura 1-6). La dirección del vector velocidad para una misma partícula es tangente a su trayectoria circular y va variando a lo largo del tiempo.

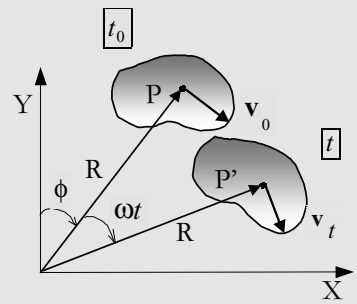


Figura 1-6

La aceleración (derivada material de la velocidad) aparece por el cambio de la dirección del vector velocidad de las partículas y es conocida como aceleración *centrípeta*:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

1.7 Trayectoria

Definición:

Trayectoria: Lugar geométrico de las posiciones que ocupa una partícula en el espacio a lo largo del tiempo.

La ecuación paramétrica en función del tiempo de una trayectoria se obtiene particularizando las ecuaciones del movimiento para una determinada partícula (identificada por sus coordenadas materiales $\mathbf{X}^*$, ver Figura 1-7):

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} \tag{1.21}$$

Dadas las ecuaciones del movimiento $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$, por cada punto del espacio pasa una trayectoria caracterizada por el valor de la etiqueta (coordenadas materiales) $\mathbf{X}$. Las ecuaciones del movimiento definen entonces una familia de curvas cuyos elementos son las trayectorias de las diversas partículas.

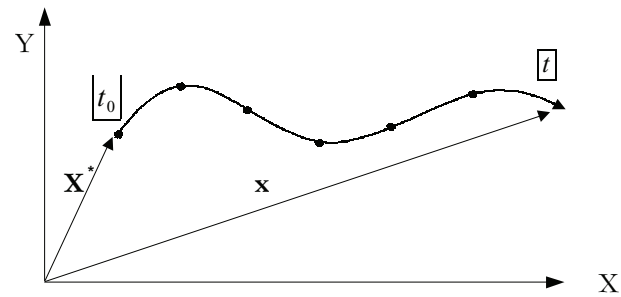


Figura 1-7 – Trayectoria de una partícula

1.7.1 Ecuación diferencial de las trayectorias

Dado el campo de velocidades en descripción espacial $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, es posible obtener la familia de trayectorias planteando el sistema de ecuaciones diferenciales que impone que, en cada punto del espacio $\mathbf{x}$, el vector velocidad sea la derivada respecto al tiempo de la ecuación paramétrica de las trayectorias dada por la ecuación (1.21).

$$\text{Encontrar} \quad \mathbf{x}(t) := \begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t),t) \\ \dfrac{dx_i(t)}{dt} = \mathrm{v}_i(\mathbf{x}(t),t) \quad i \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{1.22}$$

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (1.22) dependerá de tres constantes de integración (C_1, C_2, C_3):

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \phi(C_1, C_2, C_3, t) \\ x_i = \phi_i(C_1, C_2, C_3, t) \qquad i \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{1.23}$$

Las expresiones (1.23) constituyen una familia de curvas en el espacio parametrizada por las constantes (C_1, C_2, C_3). Asignando un valor determinado a dichas constantes se obtiene un miembro de la familia que es la trayectoria de una partícula caracterizada por la etiqueta (C_1, C_2, C_3).

Para obtener las ecuaciones en forma canónica se impone la condición de consistencia en la configuración de referencia:

$$\mathbf{x}(t)\big|_{t=0} = \mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X} = \boldsymbol{\phi}(C_1, C_2, C_3, 0) \quad \Rightarrow \quad C_i = \chi_i(\mathbf{X}) \quad i \in \{1,2,3\} \tag{1.24}$$

y substituyendo en la ecuación (1.23) se obtiene la forma canónica de la ecuación de las trayectorias:

$$\mathbf{x} = \phi(C_1(\mathbf{X}), C_2(\mathbf{X}), C_3(\mathbf{X}), t) = \varphi(\mathbf{X}, t) \tag{1.25}$$

Ejemplo 1-6 – *Considérese el campo de velocidades del Ejemplo 1-5:*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \begin{Bmatrix} \omega\, y \\ -\omega\, x \end{Bmatrix}$$

Obtener la ecuación de las trayectorias.

Utilizando la expresión (1.22), se puede escribir:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}=\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=\mathrm{v}_x(\mathbf{x},t)=\ \ \omega y\\ \dfrac{dy(t)}{dt}=\mathrm{v}_y(\mathbf{x},t)=-\omega x\end{cases}$$

El sistema anterior de ecuaciones diferenciales es un sistema de variables cruzadas. Si se deriva la segunda ecuación y se substituye el resultado en la primera se obtiene:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}=-\omega\frac{dx(t)}{dt}=-\omega^2y(t)\Rightarrow y''+\omega^2y=0$$

Ecuación característica: $r^2+\omega^2=0$

Soluciones características: $r_j=\pm i\,\omega\quad j\in\{1,2\}$

Solución : $y(t)=\text{Parte Real}\left\{C_1e^{iwt}+C_2e^{-iwt}\right\}=C_1\cos(\omega t)+C_2\,\sin(\omega t)$

La solución para $x(t)$ se obtiene a partir de $\dfrac{dy}{dt}=-\omega x$ que resulta en $x=-\dfrac{1}{\omega}\dfrac{dy}{dt}$, obteniéndose así:

$$\begin{cases}x(C_1,C_2,t)=C_1\,sin(\omega t)-C_2\cos(\omega t)\\ y(C_1,C_2,t)=C_1\cos(\omega t)+C_2\,sin(\omega t)\end{cases}$$

Las anteriores ecuaciones proporcionan las expresiones de las trayectorias en forma no canónica. La forma canónica se obtiene considerando la condición inicial:

$$\mathbf{x}(C_1,C_2,0)=\mathbf{X}$$

es decir:

$$\begin{cases}x(C_1,C_2,0)=-C_2=\mathrm{X}\\ y(C_1,C_2,0)=C_1=\mathrm{Y}\end{cases}$$

Así, las ecuaciones del movimiento, o ecuación de las trayectorias, en forma canónica son:

$$\begin{cases}x=Y\ sin(\omega t)+X\ \cos(\omega t)\\ y=Y\ \cos(\omega t)-X\ sin(\omega t)\end{cases}$$

1.8 Línea de corriente

NOTA

Dado un campo vectorial se definen sus envolventes como la familia de curvas cuyo vector tangente, en cada punto, coincide en dirección y sentido con el correspondiente vector de dicho campo vectorial.

Definición:

Líneas de corriente: Aquella familia de curvas que, para cada instante de tiempo, son las envolventes del campo de velocidades.

De acuerdo con su definición, la tangente en cada punto de una línea de corriente tiene la misma dirección y sentido (aunque no necesariamente la misma magnitud) que el vector de velocidad en dicho punto del espacio.

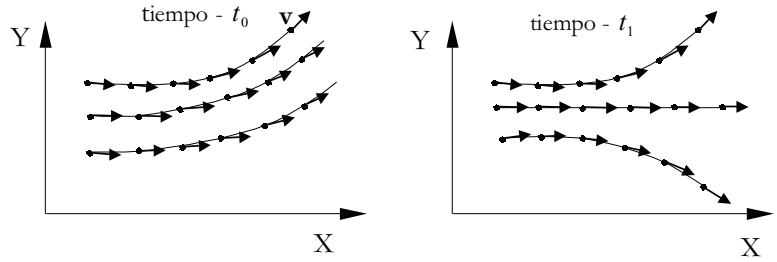


Figura 1-8– Líneas de corriente

Observación 1-6

En el caso más general el campo de velocidades (descripción espacial) será distinto para cada instante de tiempo ($\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x},t)$). Cabrá hablar, en consecuencia, de una familia distinta de líneas de corriente para cada instante de tiempo (ver Figura 1-8).

1.8.1 Ecuación diferencial de las líneas de corriente

Considérese un instante de tiempo dado t^* y la descripción espacial del campo de velocidades en dicho instante $\mathbf{v}(\mathbf{x},t^*)$. Sea $\mathbf{x}(\lambda)$ la ecuación de una línea de corriente parametrizada en función de un cierto parámetro λ. El vector tangente a la línea de corriente queda definido, para cada valor de λ por $\dfrac{d\mathbf{x}(\lambda)}{d\lambda}$ y la condición de tangencia del campo de velocidades puede escribirse como:

NOTA

Se supone que el valor del parámetro λ se elige de tal forma que en cada punto $\mathbf{x}$ del espacio, $\dfrac{d\mathbf{x}(\lambda)}{d\lambda}$ no solamente tiene la dirección del vector $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ sino que coincide con el mismo.

$$\text{Encontrar}\quad \mathbf{x}(\lambda) := \begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}(\lambda)}{d\lambda} = \mathbf{v}\left(\mathbf{x}(\lambda),t^*\right) \\ \dfrac{dx_i(\lambda)}{d\lambda} = \mathrm{v}_i\left(\mathbf{x}(\lambda),t^*\right) \quad i \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{1.26}$$

La ecuaciones (1.26) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden cuya solución para cada instante de tiempo t^*, que dependerá de tres constantes de integración $(C_1^{'}, C_2^{'}, C_3^{'})$, proporciona la expresión paramétrica de las líneas de corriente:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \phi(C_1^{'}, C_2^{'}, C_3^{'}, \lambda, t^*) \\ x_i = \phi_i(C_1^{'}, C_2^{'}, C_3^{'}, \lambda, t^*) \qquad i \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{1.27}$$

Cada tripleta de constantes de integración $(C_1^{'}, C_2^{'}, C_3^{'})$ identifica una línea de corriente cuyos puntos se obtienen a su vez asignando valores al parámetro λ. Para cada instante de tiempo t^* se obtiene una nueva familia de líneas de corriente.

Observación 1-7

Si se tiene un campo de velocidades estacionario ($\Rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x},t) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x})$), las *trayectorias y líneas de corriente coinciden*. La justificación de este hecho se puede hacer desde dos ópticas distintas:

- La no aparición del tiempo en el campo de velocidades en las ecuaciones (1.22) y (1.26) motiva que las ecuaciones diferenciales que definen las trayectorias y las que definen las líneas de corriente solo difieran en la *denominación* del parámetro de integración (t o λ respectivamente). La solución de ambos sistemas debe ser, por consiguiente, la misma salvo por el *nombre* del parámetro utilizado en los dos tipos de curvas.
- Desde un punto de vista más físico: a) Si el campo de velocidades es estacionario sus envolventes (las líneas de corriente) no varían con el tiempo; b) una determinada partícula recorre el espacio manteniendo su trayectoria en la dirección tangente al campo de velocidades que va encontrando a lo largo del tiempo; c) por consiguiente, si una trayectoria empieza en un punto de cierta línea de corriente, se mantiene sobre la misma a lo largo del tiempo.

1.9 Tubo de Corriente

Definición:

Tubo de corriente: Superficie constituida por un haz de líneas de corriente que pasan por los puntos de una línea cerrada, fija en el espacio y que *no* constituye una línea de corriente.

En casos no estacionarios, aunque la línea cerrada no varía, el tubo de corriente y las líneas de corriente sí lo hacen. Por el contrario, para el caso estacionario el tubo de corriente permanece fijo en el espacio a lo largo del tiempo.

1.9.1 Ecuación del tubo de corriente

Las líneas de corriente constituyen una familia de curvas del tipo:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(C_1, C_2, C_3, \lambda, t) \tag{1.28}$$

El problema consiste en determinar para cada instante de tiempo, qué curvas de la familia de curvas de las líneas de corriente pasan por una línea cerrada y fija en el espacio Γ, cuya expresión matemática parametrizada en función de un parámetro s es:

$$\Gamma := \quad \mathbf{x} = \mathbf{g}(s) \tag{1.29}$$

Para ello se impone la condición de pertenencia de un mismo punto a las dos curvas, en términos de los parámetros λ^* y s^*:

$$\mathbf{g}(s^*) = \mathbf{f}(C_1, C_2, C_3, \lambda^*, t) \tag{1.30}$$

Con lo cual se obtiene un sistema de tres ecuaciones del cual se puede despejar, por ejemplo, s^*, λ^*, C_3, esto es:

$$\begin{aligned} s^* &= s^*(C_1, C_2, t) \\ \lambda^* &= \lambda^*(C_1, C_2, t) \\ C_3 &= C_3(C_1, C_2, t) \end{aligned} \tag{1.31}$$

Sustituyendo (1.31) en (1.30) se obtiene:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(C_1, C_2, C_3(C_1, C_2, t), \lambda(C_1, C_2, t), t) = \mathbf{h}(C_1, C_2, t) \tag{1.32}$$

que constituye la expresión parametrizada (en función de los parámetros C_1, C_2) del tubo de corriente, para cada instante t (ver Figura 1-9).

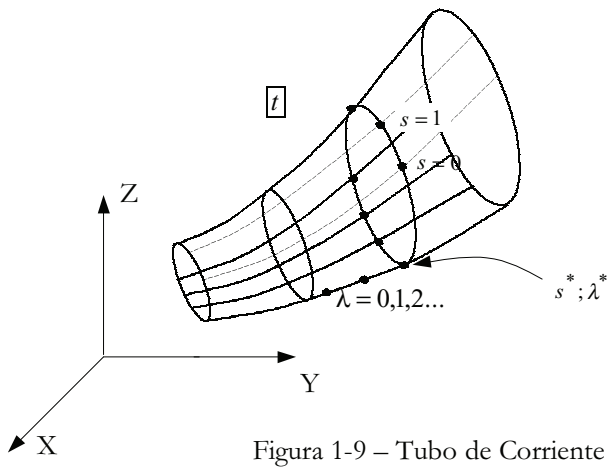


Figura 1-9 – Tubo de Corriente

1.10 Línea de traza

Definición:

Línea de traza, relativa a un punto fijo en el espacio $\mathbf{x}^*$ denominado *punto de vertido* y a un intervalo de tiempo denominado *tiempo de vertido* $[t_i, t_f]$, es el lugar geométrico de las posiciones que ocupan en un instante t, todas las partículas que han pasado por $\mathbf{x}^*$ en un instante $\tau \in [t_i, t] \cap [t_i, t_f]$.

La anterior definición corresponde al concepto físico de la línea de color (traza) que se observaría en el medio en el instante t, si se vertiese un colorante en el punto de vertido $\mathbf{x}^*$ durante el intervalo de tiempo $[t_i, t_f]$ (ver Figura 1-10).

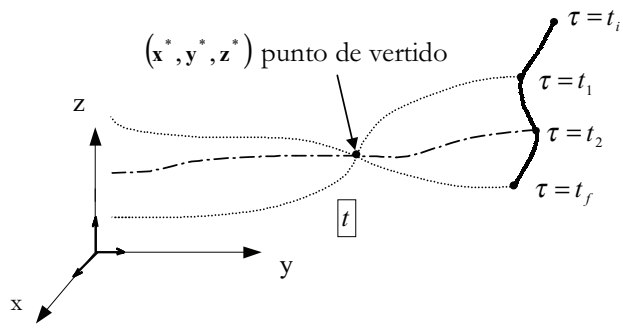


Figura 1-10 – Línea de traza

1.10.1 Ecuación de la línea de traza

Para determinar la ecuación de la línea de traza es necesario identificar las partículas que pasan por el punto $\mathbf{x}^*$ en los correspondientes instantes τ. Partiendo de las ecuaciones del movimiento dadas por (1.5) y (1.6) se trata de determinar cuál es la etiqueta de la partícula que en el instante de tiempo τ pasa por el punto de vertido. Para ello se plantea:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{x}(\mathbf{X},\tau) \\ x_i^* &= x_i(\mathbf{X},\tau) \qquad i \in 1,2,3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{f}(\tau) \tag{1.33}$$

Sustituyendo (1.33) en las ecuaciones del movimiento (1.5) se obtiene:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{f}(\tau), t) = \mathbf{g}(\tau, t) \qquad \tau \in [t_i, t] \cap [t_i, t_f] \tag{1.34}$$

La expresión (1.34) constituye, para cada instante t, la expresión paramétrica (en términos del parámetro τ) de un segmento curvilíneo en el espacio que es la línea de traza en dicho instante.

Ejemplo 1-7 – *Sea un movimiento definido por las siguientes ecuaciones del movimiento:*

$$\begin{aligned} x &= (X+Y)t^2 + X\cos t \\ y &= (X+Y)\cos t - X \end{aligned}$$

Obtener la ecuación de la línea de traza asociada al punto de vertido $x^* = (0,1)$ *para el periodo de vertido* $[t_0, +\infty)$.

Las coordenadas materiales de la partícula que han pasado por el punto de vertido en el instante τ están dadas por:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= (X+Y)\tau^2 + X\cos\tau \\ 1 &= (X+Y)\cos\tau - X \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} X = \dfrac{-\tau^2}{\tau^2 + \cos^2\tau} \\ Y = \dfrac{\tau^2 + \cos\tau}{\tau^2 + \cos^2\tau} \end{cases}$$

Por lo tanto la etiqueta de las partículas que han pasado por el punto de vertido desde el instante de inicio de vertido t_0 hasta el instante actual t queda definida por:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{-\tau^2}{\tau^2+\cos^2\tau} \\ Y &= \frac{\tau^2+\cos\tau}{\tau^2+\cos^2\tau} \end{aligned}\right\} \quad \tau\in[t_0,t]\cap[t_0,\infty]=[t_0,t]$$

De aquí substituyendo en las ecuaciones del movimiento se obtienen las ecuaciones de la línea de traza:

$$\mathbf{x}=\mathbf{g}(\tau,t)\equiv \begin{cases} x=\dfrac{\cos\tau}{\tau^2+\cos^2\tau}t^2+\dfrac{-\tau^2}{\tau^2+\cos^2\tau}\cos t \\ y=\dfrac{\cos\tau}{\tau^2+\cos^2\tau}\cos t-\dfrac{-\tau^2}{\tau^2+\cos^2\tau} \end{cases} \qquad \tau\in[t_0,t]$$

Observación 1-8

En un problema e*stacionario* las líneas de traza son segmentos de las trayectorias (o de las líneas de corriente). La justificación se basa en el hecho de que en el caso estacionario la trayectoria sigue la envolvente del campo de velocidades que permanece constante con el tiempo. Si se considera un punto de vertido, $\mathbf{x}^*$, todas las partículas que pasan por él seguirán porciones (segmentos) de la misma trayectoria.

1.11 Superficie material

Definición:

Superficie material: Superficie móvil en el espacio constituida siempre por las mismas partículas (puntos materiales).

En la configuración de referencia Ω_0 la superficie Σ_0 podrá definirse en términos de una función de las coordenadas materiales $F(X,Y,Z)$ como:

$$\Sigma_0 := \{X,Y,Z \quad | \quad F(X,Y,Z)=0\} \tag{1.35}$$

Observación 1-9

La función $F(X,Y,Z)$ no depende del tiempo, lo que garantiza que las partículas, identificadas por su etiqueta, que cumplen la ecuación $F(X,Y,Z)=0$ son siempre las mismas de acuerdo con la definición de superficie material.

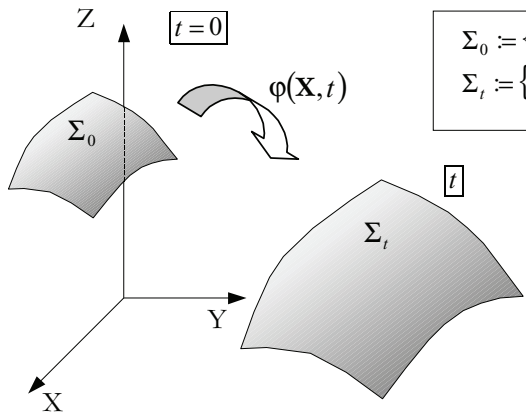


Figura 1-11 – Superficie material

La descripción espacial de la superficie se obtendrá a partir de la descripción espacial de $F(\mathbf{X}(\mathbf{x},t)=f(x,y,z,t)$:

$$\Sigma_t \coloneqq \{x,y,z \quad | \quad f(x,y,z,t)=0\} \tag{1.36}$$

Observación 1-10

La función $f(x,y,z,t)$ depende explícitamente del tiempo, lo que establece que los *puntos del espacio* que estarán sobre la superficie varían con el tiempo. Esta dependencia del tiempo de la descripción espacial de la superficie, le confiere su carácter de superficie móvil en el espacio (ver Figura 1-11).

Observación 1-11

Condición necesaria y suficiente para que una superficie móvil en el espacio, definida implícitamente por una función $f(x,y,z,t)=0$, sea material (esté constituida siempre por las mismas partículas) es *que la derivada material de* $f(x,y,z,t)$ *sea nula*:

$$\frac{df(\mathbf{x},t)}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla f=0 \qquad \forall \mathbf{x}\in\Sigma_t \quad \forall t$$

La condición es *necesaria* puesto que si la superficie es material, su descripción material no depende del tiempo ($F\equiv F(\mathbf{X})$) y por consiguiente, su descripción espacial tiene derivada material nula. La condición de *suficiencia* se fundamenta en que, si la derivada material de $f(\mathbf{x},t)$ es nula, la correspondiente descripción material no depende del tiempo ($F\equiv F(\mathbf{X})$) y por consiguiente, el conjunto de partículas (identificadas por su coordenadas materiales) que cumplen la condición $F(\mathbf{X})=0$ es siempre el mismo.

Ejemplo 1-8 – En la teoría de oleaje se impone la condición de que la superficie libre del fluido que está en contacto con la atmósfera sea una superficie material. Es decir, esta restricción supone que la superficie libre está formada siempre por las mismas partículas (hipótesis razonable sobre todo en aguas profundas).

Si se supone que $z=\eta(x,y,t)$ define la altura de la superficie del mar respecto a un nivel de referencia, la superficie libre del agua vendrá definida por:

$$f(x,y,z,t)\equiv z-\eta(x,y,t)=0\,.$$

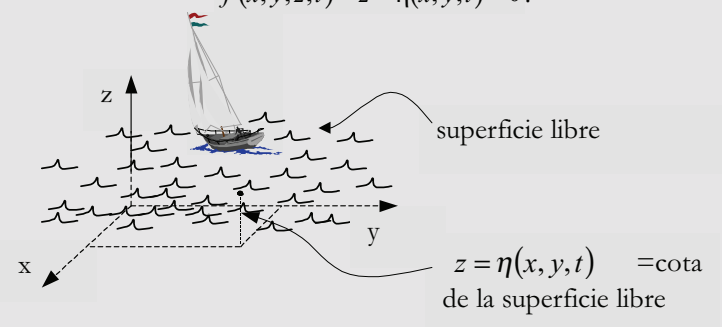


Figura 1-12

La condición $\dfrac{df}{dt}=0$ se escribe como:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$\mathbf{v}\cdot\nabla f=\begin{bmatrix}\mathrm{v}_x & \mathrm{v}_y & \mathrm{v}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\end{bmatrix}=\mathrm{v}_x\frac{\partial f}{\partial x}+\mathrm{v}_y\frac{\partial f}{\partial y}+\mathrm{v}_z\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla f=-\frac{\partial \eta}{\partial t}-\mathrm{v}_x\frac{\partial \eta}{\partial x}-\mathrm{v}_y\frac{\partial \eta}{\partial y}+\mathrm{v}_z=0\quad\Rightarrow$$

$$\mathrm{v}_z=\frac{\partial \eta}{\partial t}+\mathrm{v}_x\frac{\partial \eta}{\partial x}+\mathrm{v}_y\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Es decir, la condición de superficie material se traduce en una condición sobre la componente vertical del campo de velocidades.

1.12 Superficie de control

Definición:

Superficie de control: Una superficie fija en el espacio.

Su descripción matemática viene dada por:

$$\Sigma:=\{\mathbf{x}\ \mid\ f(x,y,z)=0\}\qquad(1.37)$$

Es evidente que una superficie de control es atravesada por las distintas partículas del medio continuo a lo largo del tiempo (ver Figura 1-13)

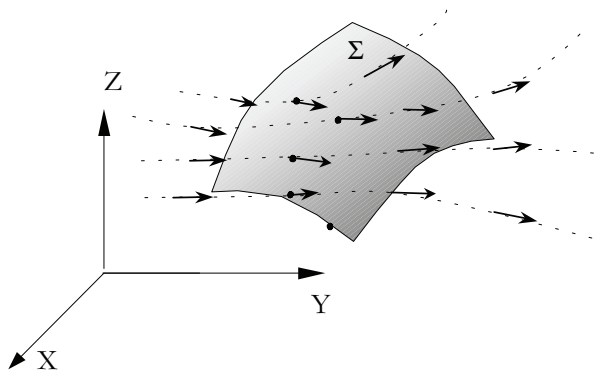


Figura 1-13 – Superficie de control

1.13 Volumen material

Definición:

Volumen material: Es un volumen limitado por una superficie material cerrada.

La descripción matemática del volumen material V (ver Figura 1-14) viene dada por:

$$V_0 \coloneqq \{\mathbf{X} \mid F(\mathbf{X}) \leq 0\} \tag{1.38}$$

en la descripción material, y por:

$$V_t \coloneqq \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x},t) \leq 0\} \tag{1.39}$$

en la descripción espacial, siendo $F(\mathbf{X}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)$ la función que describe la superficie material que lo encierra.

NOTA

Se entiende la función $F(\mathbf{X})$ definida de tal forma que $F(\mathbf{X}) < 0$ corresponde a puntos del interior de V_0

Observación 1-12

Un volumen material está constituido siempre por las mismas partículas. La justificación se hace por reducción al absurdo: si una cierta partícula pudiese entrar o salir del volumen material, se incorporaría en su movimiento a la superficie material (al menos por un instante de tiempo). Esto sería contrario al hecho de que la superficie, por ser material, está formada siempre por las mismas partículas.

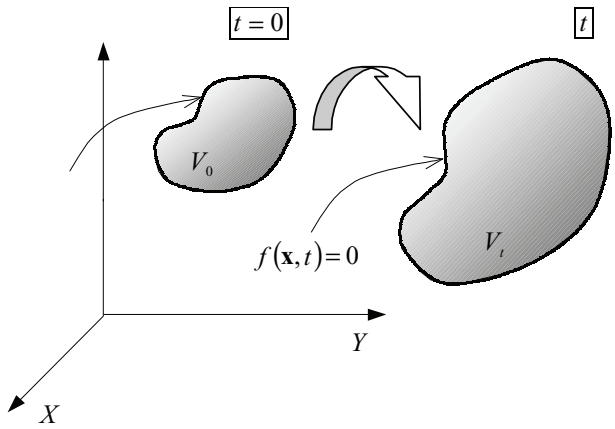


Figura 1-14– Volumen material

1.14 Volumen de control

Definición:

Volumen de control: Conjunto de puntos del espacio situados en el interior de una superficie de control cerrada.

NOTA

Se entiende la función $f(\mathbf{x})$ definida de tal forma que $f(\mathbf{x}) < 0$ corresponde a puntos del interior de V

Se trata de un volumen fijo en el espacio que es atravesado por las partículas del medio durante su movimiento. Su descripción matemática es:

$$V \coloneqq \{\mathbf{x} \quad | \quad f(\mathbf{x}) \leq 0\} \tag{1.40}$$

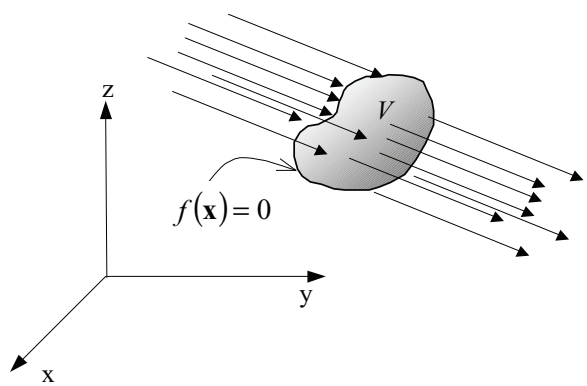


Figura 1-15 – Volumen de control

2 Descripción de la deformación

2.1 Introducción

Definición

Deformación: en el contexto más general, el concepto deformación se refiere al estudio no ya del movimiento absoluto de las partículas tal como se hizo en el capítulo 1, sino del *movimiento relativo* con respecto a una partícula determinada*, de las partículas situadas en un entorno diferencial de aquella.*

2.2 Tensor gradiente de deformación

Consideremos en el medio continuo en movimiento de la Figura 2-1 una partícula P en la configuración de referencia Ω_0, y que ocupa el punto del espacio P' en la configuración actual Ω_t, y una partícula Q situada en un entorno diferencial de P y cuyas posiciones relativa respecto a ésta en los instante de referencia y actual vienen dadas por $d\mathbf{X}$ y $d\mathbf{x}$ respectivamente.

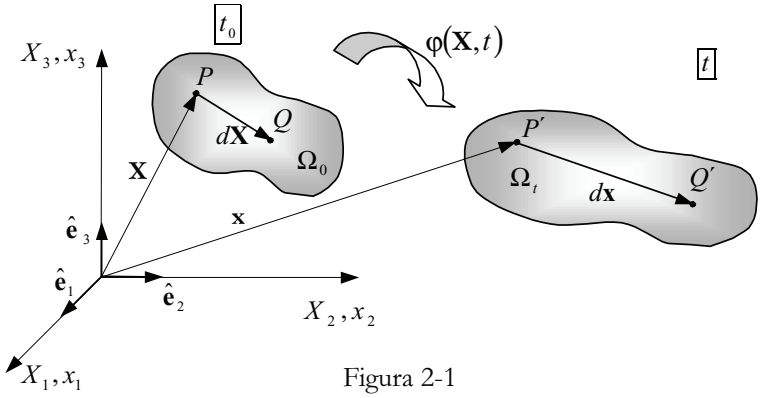


Figura 2-1

Sean

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X},t) \overset{not}{=} \mathbf{x}(\mathbf{X},t) \\ x_i = \varphi_i(X_1,X_2,X_3,t) \overset{not}{=} x_i(X_1,X_2,X_3,t) \qquad i \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{2.1}$$

las ecuaciones del movimiento. Diferenciando (2.1) con respecto a las coordenadas materiales $\mathbf{X}$ resulta:

$$\text{Ecuación fundamental de la deformación} \rightarrow \begin{cases} dx_i = \underbrace{\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}}_{F_{ij}} dX_j \quad i,j \in \{1,2,3\} \\ d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \end{cases} \tag{2.2}$$

NOTACIÓN

Se considera aquí la forma simbólica del *operador Nabla material*:

$$\overline{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial X_i}\hat{\mathbf{e}}_i$$

aplicada a la expresión del producto tensorial o abierto:

$$\left[\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\right]_{ij} \overset{not}{=} \left[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\right]_{ij} = \\ = a_i b_j$$

La ecuación (2.2) define el tensor *gradiente material de la deformación* $\mathbf{F}(\mathbf{X},t)$:

$$\text{Tensor gradiente material de la deformación} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{F} \overset{not}{=} \mathbf{x}\otimes\overline{\nabla} \\ F_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{2.3}$$

Las componentes explícitas del tensor $\mathbf{F}$ vienen dadas por:

$$\left[\mathbf{F}\right] = \left[\mathbf{x}\otimes\overline{\nabla}\right] = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{x}]} \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial X_1} & \dfrac{\partial}{\partial X_2} & \dfrac{\partial}{\partial X_3} \end{bmatrix}}_{\overline{\nabla}^T} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Observación 2-1

El *tensor gradiente de la deformación* $\mathbf{F}(\mathbf{X},t)$ contiene la información del movimiento relativo, a lo largo del tiempo t, de todas las partículas materiales en el entorno diferencial de una dada, identificada por sus coordenadas materiales $\mathbf{X}$. En efecto, la ecuación (2.2) proporciona la evolución del vector de posición relativo $d\mathbf{x}$ en función de la correspondiente posición relativa $d\mathbf{X}$ en el instante de referencia. En este sentido, si se conoce el valor de $\mathbf{F}(\mathbf{X},t)$ se dispone de la información asociada al concepto general de deformación definida en la sección 2.1

2.2.1 Tensor gradiente de la deformación inverso

Considerando ahora las ecuaciones de movimiento inversas:

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x},t) \overset{not}{=} \mathbf{X}(\mathbf{x},t) \\ X_i = \varphi_i^{-1}(x_1,x_2,x_3,t) \overset{not}{=} X_i(x_1,x_2,x_3,t) \qquad i \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{2.5}$$

y diferenciando (2.5) con respecto a las coordenadas espaciales x_i, resulta:

$$\begin{cases} dX_i = \underbrace{\dfrac{\partial X_i}{\partial x_j}}_{F^{-1}_{ij}} dx_j \quad i,j \in \{1,2,3\} \\ d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \end{cases} \tag{2.6}$$

Al tensor definido por al ecuación (2.6) se le denomina tensor *gradiente espacial de la deformación* o tensor *gradiente (material) de la deformación inverso* y viene caracterizado por:

$$\text{Tensor gradiente espacial de la deformación} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{F}^{-1} \overset{not}{=} \mathbf{X} \otimes \nabla \\ F^{-1}_{ij} = \dfrac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{2.7}$$

NOTACIÓN

Se considera aquí la forma simbólica del operador *Nabla espacial*

$\nabla \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i \cdot$

Obsérvese la diferencia de notación entre dicho operador espacial (∇) y el operador *Nabla material* ($\overline{\nabla}$).

Las componentes explícitas del tensor $\mathbf{F}^{-1}$ vienen dadas por:

$$\left[\mathbf{F}^{-1}\right] = \left[\mathbf{X} \otimes \nabla\right] = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{X}]} \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}}_{[\nabla]^T} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Observación 2-2

El tensor gradiente espacial de la deformación, denotado en (2.6) y (2.7) mediante $\mathbf{F}^{-1}$, es efectivamente el inverso del tensor gradiente (material) de la deformación $\mathbf{F}$. La comprobación es inmediata puesto que:

$$\underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial X_k}}_{F_{ik}} \underbrace{\frac{\partial X_k}{\partial x_j}}_{F^{-1}_{kj}} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \overset{not}{=} \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{1}$$

$$\underbrace{\frac{\partial X_i}{\partial x_k}}_{F^{-1}_{ik}} \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial X_j}}_{F_{kj}} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} \overset{not}{=} \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{1}$$

RECORDATORIO

Se define el operador de dos índices *Delta de Kronecker* δ_{ij} como:

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$

El tensor unidad de 2º orden $\mathbf{1}$ viene definido por: $[\mathbf{1}]_{ij} = \delta_{ij}$.

Ejemplo 2-1 – *Para un determinado instante, el movimiento de un medio continuo viene definido por:*

$$x_1 = X_1 - AX_3 \quad , \quad x_2 = X_2 - AX_3 \quad , \quad x_3 = -AX_1 + AX_2 + X_3 .$$

Obtener el tensor gradiente material de la deformación $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ *en dicho instante. A partir de las ecuaciones de movimiento inversas obtener el tensor gradiente espacial de la deformación* $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x})$. *Con los resultados obtenidos comprobar que* $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{1}$.

a) Tensor gradiente material de la deformación:

$$\mathbf{F} = \mathbf{x} \otimes \overline{\nabla} \equiv [\mathbf{x}] \cdot [\overline{\nabla}]^T = \begin{bmatrix} X_1 - AX_3 \\ X_2 - AX_3 \\ -AX_1 + AX_2 + X_3 \end{bmatrix} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial X_1}, \quad \frac{\partial}{\partial X_2}, \quad \frac{\partial}{\partial X_3} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -A \\ 0 & 1 & -A \\ -A & A & 1 \end{bmatrix}$$

b) Ecuaciones de movimiento inversas: De la inversión algebraica de las ecuaciones de movimiento se obtiene:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x},t) \equiv \begin{cases} X_1 = (1+A^2)\,x_1 - A^2\,x_2 + A\,x_3 \\ X_2 = A^2\,x_1 + (1-A^2)\,x_2 + A\,x_3 \\ X_3 = A\,x_1 - A\,x_2 + x_3 \end{cases}$$

c) Tensor gradiente espacial de la deformación:

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{X} \otimes \nabla \equiv [\mathbf{X}] \cdot [\nabla]^T = \begin{bmatrix} (1+A^2)\,x_1 - A^2\,x_2 + A\,x_3 \\ A^2\,x_1 + (1-A^2)\,x_2 + A\,x_3 \\ A\,x_1 - A\,x_2 + x_3 \end{bmatrix} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+A^2 & -A^2 & A \\ A^2 & 1-A^2 & A \\ A & -A & 1 \end{bmatrix}$$

d) Comprobación:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & -A \\ 0 & 1 & -A \\ -A & A & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+A^2 & -A^2 & A \\ A^2 & 1-A^2 & A \\ A & -A & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{1}$$

2.3 Desplazamientos

Definición:

Desplazamiento: diferencia entre los vectores de posición de una misma partícula en las configuraciones actual y de referencia.

El desplazamiento de una partícula P en un instante determinado viene definido por el vector $\mathbf{u}$ que une los puntos del espacio P (posición inicial) y P' (posición en el instante actual t) de la partícula (ver Figura 2-2). El desplazamiento de todas las partículas del medio continuo define el *campo vectorial de desplazamientos* que, como toda propiedad del medio continuo, podrá describirse en forma material $\mathbf{U}(\mathbf{X},t)$ o espacial, $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$:

$$\begin{cases} \mathbf{U}(\mathbf{X},t) = \mathbf{x}(\mathbf{X},t) - \mathbf{X} \\ U_i(\mathbf{X},t) = x_i(\mathbf{X},t) - X_i \qquad i \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(x,t) \\ u_i(\mathbf{x},t) = x_i - X_i(\mathbf{x},t) \qquad i \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{2.10}$$

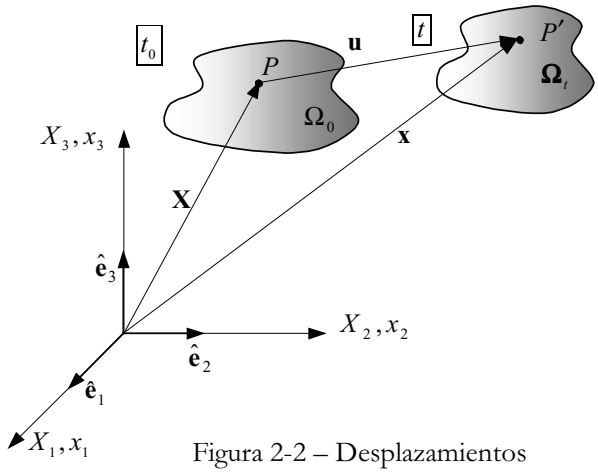


Figura 2-2 – Desplazamientos

2.3.1 Tensores gradiente material y espacial de los desplazamientos

La derivación del vector desplazamiento U_i en la ecuación (2.9) con respecto a las coordenadas materiales lleva a:

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial X_j}}_{F_{ij}} - \underbrace{\frac{\partial X_i}{\partial X_j}}_{\delta_{ij}} = F_{ij} - \delta_{ij} \overset{def}{=} J_{ij} \tag{2.11}$$

que define el *tensor gradiente material de los desplazamientos* como:

$$\text{Tensor gradiente material de los desplazamientos} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{J}(\mathbf{X},t) \overset{def}{=} \mathbf{U}(\mathbf{X},t) \otimes \overline{\nabla} = \mathbf{F} - \mathbf{1} \\ J_{ij} = \dfrac{\partial U_i}{\partial X_j} = F_{ij} - \delta_{ij} \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{2.12}$$

$$\begin{cases} dU_i = \dfrac{\partial U_i}{\partial X_j} dX_j = J_{ij}\, dX_j \quad i,j \in \{1,2,3\} \\ d\mathbf{U} = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{X} \end{cases} \tag{2.13}$$

De forma similar, diferenciando la expresión de u_i en la ecuación (2.10), con respecto a las coordenadas espaciales se obtiene:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{\delta_{ij}} - \underbrace{\frac{\partial X_i}{\partial x_j}}_{F^{-1}_{ij}} = \delta_{ij} - F^{-1}_{ij} \overset{def}{=} j_{ij} \tag{2.14}$$

que define el *tensor gradiente espacial de los desplazamientos* como:

$$\text{Tensor gradiente espacial de los desplazamientos} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{j}(\mathbf{x},t) \overset{def}{=} \mathbf{u}(\mathbf{x},t) \otimes \nabla = \mathbf{1} - \mathbf{F}^{-1} \\ j_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - F^{-1}_{ij} \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\begin{cases} du_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dx_j = j_{ij}\, dx_j \qquad i,j \in \{1,2,3\} \\ d\mathbf{u} = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{x} \end{cases} \tag{2.16}$$

2.4 Tensores de deformación

Consideremos ahora una partícula del medio continuo, que ocupa el punto del espacio P en la configuración material, y otra partícula Q de su entorno diferencial separada de la anterior por el segmento $d\mathbf{X}$ (de longitud $dS = \sqrt{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}}$) siendo $d\mathbf{x}$ (de longitud $ds = \sqrt{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}$) su homólogo en la configuración actual (ver Figura 2-3). Ambos vectores diferenciales están relacionados por el tensor gradiente de la deformación $\mathbf{F}(\mathbf{X},t)$ mediante las ecuaciones (2.2) ó (2.6):

$$\begin{cases} d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} & d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \\ dx_i = F_{ij}\, dX_j & dX_i = F^{-1}_{ij}\, dx_j \end{cases} \tag{2.17}$$

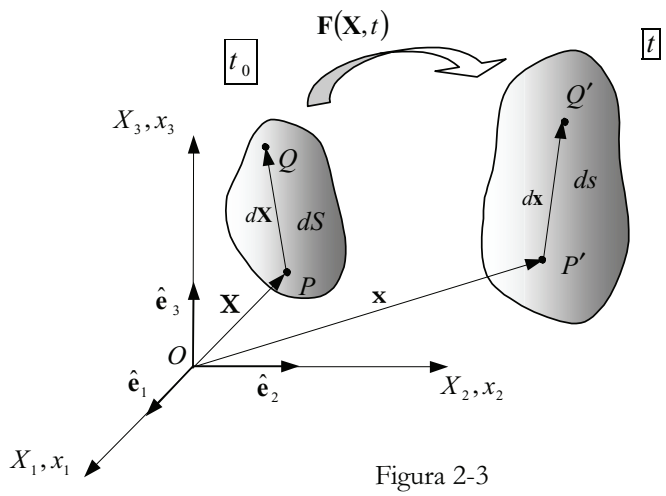


Figura 2-3

Puede escribirse entonces:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = [d\mathbf{x}]^T \cdot [d\mathbf{x}] = [\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}]^T \cdot [\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}] = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \\ (ds)^2 &= dx_k\, dx_k = F_{ki}\, dX_i F_{kj}\, dX_j = dX_i F_{ki} F_{kj} dX_j = dX_i F^T_{ik} F_{kj} dX_j \end{aligned} \tag{2.18}$$

y, alternativamente,

NOTACIÓN

Se utiliza la convención:

$\left[(\bullet)^{-1}\right]^T \overset{not}{=} (\bullet)^{-T}$

$$\begin{aligned} (dS)^2 &= d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = [d\mathbf{X}]^T \cdot [d\mathbf{X}] = \left[\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}\right]^T \cdot \left[\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}\right] \overset{not}{=} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \\ (dS)^2 &= dX_k\, dX_k = F^{-1}_{ki}\, dx_i F^{-1}_{kj}\, dx_j = dx_i F^{-1}_{ki} F^{-1}_{kj} dx_j = dx_i F^{-T}_{ik} F^{-1}_{kj} dx_j \end{aligned} \tag{2.19}$$

2.4.1 Tensor material de deformación (tensor de deformación de Green-Lagrange)

Restando las expresiones (2.18) y (2.19) se obtiene:

$$\begin{aligned}(ds)^2-(dS)^2 &= d\mathbf{X}\cdot\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F}\cdot d\mathbf{X}-d\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X}=d\mathbf{X}\cdot\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F}\cdot d\mathbf{X}-d\mathbf{X}\cdot\mathbf{1}\cdot d\mathbf{X}= \\ &= d\mathbf{X}\cdot\underbrace{(\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F}-\mathbf{1})}_{\substack{def\\ =2\mathbf{E}}}\cdot d\mathbf{X}=2\,d\mathbf{X}\cdot\mathbf{E}\cdot d\mathbf{X}\end{aligned} \tag{2.20}$$

La ecuación (2.20) define implícitamente el denominado *tensor material de deformación* o *tensor de deformación de Green-Lagrange* como:

$$\text{Tensor material de deformación (Green - Lagrange)} \rightarrow \begin{cases}\mathbf{E}(\mathbf{X},t)=\frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F}-\mathbf{1}) \\ E_{ij}(\mathbf{X},t)=\frac{1}{2}(F_{ki}F_{kj}-\delta_{ij}) \quad i,j\in\{1,2,3\}\end{cases} \tag{2.21}$$

Observación 2-3

El tensor material de deformación $\mathbf{E}$ es simétrico. La demostración se obtiene directamente de la ecuación (2.21) observando que:

$$\begin{cases}\mathbf{E}^T=\frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F}-\mathbf{1})^T=\frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\cdot(\mathbf{F}^T)^T-\mathbf{1}^T)=\frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F}-\mathbf{1})=\mathbf{E} \\ E_{ij}=E_{ji} \qquad i,j\in\{1,2,3\}\end{cases}$$

2.4.2 Tensor espacial de deformación (tensor de deformación de Almansi)

Restando de forma alternativa las expresiones (2.18) y (2.19) se obtiene:

$$\begin{aligned}(ds)^2-(dS)^2 &= d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}-d\mathbf{x}\cdot\mathbf{F}^{-T}\cdot\mathbf{F}^{-1}\cdot d\mathbf{x}=d\mathbf{x}\cdot\mathbf{1}\cdot d\mathbf{x}-d\mathbf{x}\cdot\mathbf{F}^{-T}\cdot\mathbf{F}^{-1}\cdot d\mathbf{x} \\ &= d\mathbf{x}\cdot\underbrace{(\mathbf{1}-\mathbf{F}^{-T}\cdot\mathbf{F}^{-1})}_{\substack{def\\ =2\mathbf{e}}}\cdot d\mathbf{x}=2\,d\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}\cdot d\mathbf{x}\end{aligned} \tag{2.22}$$

La ecuación (2.22) define implícitamente el denominado *tensor espacial de deformación* o *tensor de deformación de Almansi* como:

$$\text{Tensor espacial de deformación (Almansi)} \rightarrow \begin{cases}\mathbf{e}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2}(\mathbf{1}-\mathbf{F}^{-T}\cdot\mathbf{F}^{-1}) \\ e_{ij}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2}(\delta_{ij}-F_{ki}^{-1}F_{kj}^{-1}) \quad i,j\in\{1,2,3\}\end{cases} \tag{2.23}$$

Observación 2-4

El tensor espacial de deformación $\mathbf{e}$ es simétrico. La demostración se obtiene directamente de la ecuación (2.23) observando que:

$$\begin{cases} \mathbf{e}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T}\cdot\mathbf{F}^{-1})^T = \frac{1}{2}(\mathbf{1}^T - (\mathbf{F}^{-1})^T\cdot(\mathbf{F}^{-T})^T) = \\ \quad = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T}\cdot\mathbf{F}^{-1}) = \mathbf{e} \\ e_{ij} = e_{ji} \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{cases}$$

Observación 2-5

Los tensores material $\mathbf{E}$ y espacial $\mathbf{e}$ de deformación *son tensores distintos* y *no se trata de la descripción material y espacial de un mismo tensor de deformación*. Las expresiones (2.20) y (2.22):

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2\,d\mathbf{X}\cdot\mathbf{E}\cdot d\mathbf{X} = 2\,d\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}\cdot d\mathbf{x}$$

lo ponen de manifiesto puesto que ambos tensores vienen afectados por distintos vectores ($d\mathbf{X}$ y $d\mathbf{x}$ respectivamente).

El *tensor de deformación de Green-Lagrange* viene descrito *naturalmente* en descripción material ($\mathbf{E}(\mathbf{X},t)$). En la ecuación (2.20) actúa sobre el elemento $d\mathbf{X}$ (definido en la configuración material) y de ahí su denominación *de tensor material de deformación*. Sin embargo, como toda propiedad de medio continuo puede describirse, si es necesario, también en forma espacial ($\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$) mediante la adecuada substitución de las ecuaciones de movimiento.

Con el *tensor de deformación de Almansi* ocurre lo contrario: viene descrito *naturalmente* en forma espacial y en la ecuación (2.22) actúa sobre el vector diferencial (definido en la configuración espacial) $d\mathbf{x}$ y de ahí su denominación de *tensor espacial de deformación*. También puede ser descrito, si es conveniente, en forma material ($\mathbf{e}(\mathbf{X},t)$).

Ejemplo 2-2 – *Para el movimiento del Ejemplo 2-1, obtener los tensores material y espacial de deformación.*

a) Tensor material de deformación: $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F} - \mathbf{1}) =$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -A \\ 0 & 1 & A \\ -A & -A & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & -A \\ 0 & 1 & -A \\ -A & A & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} A^2 & -A^2 & -2A \\ -A^2 & A^2 & 0 \\ -2A & 0 & 2A^2 \end{bmatrix}$$

b) Tensor espacial de deformación: $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) =$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1+A^2 & A^2 & A\\ -A^2 & 1-A^2 & -A\\ A & A & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1+A^2 & -A^2 & A\\ A^2 & 1-A^2 & A\\ A & -A & 1\end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-3A^2-2A^4 & A^2+2A^4 & -2A-2A^3\\ A^2+2A^4 & A^2-2A^4 & 2A^3\\ -2A-2A^3 & 2A^3 & -2A^2\end{bmatrix}$$

(Obsérvese que $\mathbf{E} \neq \mathbf{e}$).

2.4.3 Expresión de los tensores de deformación en términos de los (gradientes de los) desplazamientos

Substituyendo las expresiones (2.12) ($\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{J}$) y (2.15) ($\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{1} - \mathbf{j}$) en las ecuaciones (2.21) y (2.23) se obtienen las expresiones de los tensores de deformación en función del gradiente material, $\mathbf{J}(\mathbf{X},t)$, y espacial, $\mathbf{j}(\mathbf{x},t)$, de los desplazamientos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{X},t) \rightarrow \begin{cases} \mathbf{E} = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{1}+\mathbf{J}^T)\cdot(\mathbf{1}+\mathbf{J}) - \mathbf{1}\right] = \frac{1}{2}\left[\mathbf{J} + \mathbf{J}^T + \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J}\right] \\ E_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i}\frac{\partial U_k}{\partial X_j}\right] \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{2.24}$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{x},t) \rightarrow \begin{cases} \mathbf{e} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{1} - (\mathbf{1}-\mathbf{j}^T)\cdot(\mathbf{1}-\mathbf{j})\right] = \frac{1}{2}\left[\mathbf{j} + \mathbf{j}^T - \mathbf{j}^T \cdot \mathbf{j}\right] \\ e_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right] \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{2.25}$$

2.5 Variación de las distancias: Estiramiento. Alargamiento unitario

Consideremos ahora una partícula P en la configuración de referencia y otra partícula Q, situada en un entorno diferencial de P, ver Figura 2-4. Las correspondientes posiciones en la configuración actual vienen dadas por los puntos del espacio P' y Q' de tal forma que las distancia entre ambas partículas en la configuración de referencia, dS, se transforma en ds en el instante actual. Sean $\mathbf{T}$ y $\mathbf{t}$ sendos vectores unitarios en las direcciones $\overline{PQ}$ y $\overline{P'Q'}$, respectivamente.

Definición:

Estiramiento: en el punto material P (o en el punto espacial P') en la dirección material $\mathbf{T}$ (o en la dirección espacial $\mathbf{t}$) es la longitud del segmento diferencial *deformado* $\overline{P'Q'}$ por unidad de longitud del segmento diferencial *original* $\overline{PQ}$.

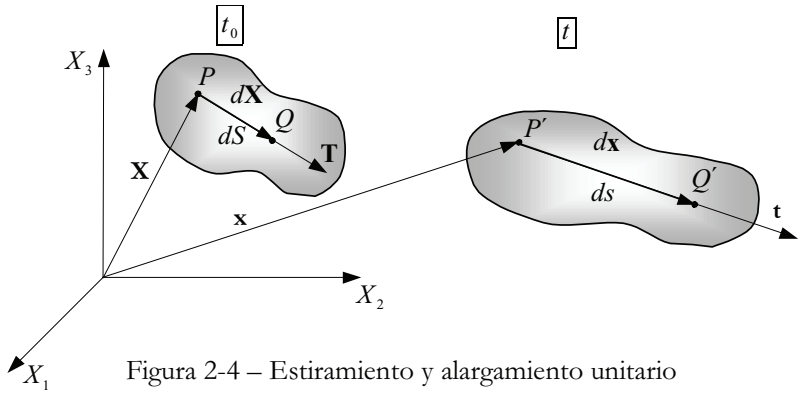


Figura 2-4 – Estiramiento y alargamiento unitario

La traducción a lenguaje matemático de la anterior definición es:

$$\text{Estiramiento} \overset{\text{def}}{=} \lambda_{\mathbf{T}} = \lambda_{\mathbf{t}} = \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{ds}{dS} \qquad (0 < \lambda < \infty) \tag{2.26}$$

NOTACIÓN

Frecuentemente se prescindirá de los subíndices $(\bullet)_{\mathbf{T}}$ o $(\bullet)_{\mathbf{t}}$ al referirse a los estiramientos o alargamientos unitarios. Téngase bien presente, sin embargo, que siempre están asociados a una dirección determinada.

Definición:

Alargamiento unitario: en el punto material P (o en el punto espacial P') en la dirección material $\mathbf{T}$ (o en la dirección espacial $\mathbf{t}$) es el incremento de longitud del segmento diferencial *deformado* $\overline{P`Q`}$ por unidad de longitud del segmento diferencial *original* $\overline{PQ}$.

y la correspondiente definición matemática:

$$\text{Alargamiento unitario} \overset{\text{def}}{=} \varepsilon_{\mathbf{T}} = \varepsilon_{\mathbf{t}} = \frac{\Delta\overline{PQ}}{\overline{PQ}} = \frac{ds - dS}{dS} \tag{2.27}$$

Las ecuaciones (2.26) y (2.27) permite relacionar inmediatamente los valores del alargamiento unitario y del estiramiento para un mismo punto y dirección como:

$$\varepsilon = \frac{ds - dS}{dS} = \frac{ds}{\underbrace{dS}_{\lambda}} - 1 = \lambda - 1 \qquad (\Rightarrow -1 < \varepsilon < \infty) \tag{2.28}$$

Observación 2-6

- Si $\lambda = 1 \quad (\varepsilon = 0) \Rightarrow ds = dS$: Las partículas P y Q pueden haberse movido relativamente con el tiempo, pero sin aumentar ni disminuir la distancia entre ellas.
- Si $\lambda > 1 \quad (\varepsilon > 0) \Rightarrow ds > dS$: La distancia entre las partículas P y Q se ha alargado con la deformación del medio.
- Si $\lambda < 1 \quad (\varepsilon < 0) \Rightarrow ds < dS$: La distancia entre las partículas P y Q se ha acortado con la deformación del medio.

2.5.1 Estiramientos, alargamientos unitarios y los tensores de deformación

Considerando las ecuaciones (2.20) y (2.22) y las expresiones geométricas $d\mathbf{X} = \mathbf{T}\, dS$ y $d\mathbf{x} = \mathbf{t}\, ds$, ver Figura 2-4, se puede escribir:

$$\begin{cases} (ds)^2 - (dS)^2 = 2\, \underbrace{\frac{d\mathbf{X}}{dS}}_{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{E} \cdot \underbrace{\frac{d\mathbf{X}}{dS}}_{\mathbf{T}} = 2(dS)^2\, \mathbf{T}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{T} \\ (ds)^2 - (dS)^2 = 2\, \underbrace{\frac{d\mathbf{x}}{ds}}_{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{e} \cdot \underbrace{\frac{d\mathbf{x}}{ds}}_{\mathbf{t}} = 2(ds)^2\, \mathbf{t}\cdot\mathbf{e}\cdot\mathbf{t} \end{cases} \tag{2.29}$$

y dividiendo ambas ecuaciones por $(dS)^2$ y $(ds)^2$, respectivamente, se obtiene:

$$\underbrace{\left(\frac{ds}{dS}\right)^2}_{\lambda^2} - 1 = \lambda^2 - 1 = 2\,\mathbf{T}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \lambda = \sqrt{1 + 2\,\mathbf{T}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{T}} \\ \varepsilon = \lambda - 1 = \sqrt{1 + 2\,\mathbf{T}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{T}} - 1 \end{cases}} \tag{2.30}$$

$$1 - \underbrace{\left(\frac{dS}{ds}\right)^2}_{1/\lambda} = 1 - (1/\lambda)^2 = 2\,\mathbf{t}\cdot\mathbf{e}\cdot\mathbf{t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2\,\mathbf{t}\cdot\mathbf{e}\cdot\mathbf{t}}} \\ \varepsilon = \lambda - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2\,\mathbf{t}\cdot\mathbf{e}\cdot\mathbf{t}}} - 1 \end{cases}} \tag{2.31}$$

expresiones que permiten calcular el alargamiento unitario y el estiramiento según una dirección (material, $\mathbf{T}$ o espacial, $\mathbf{t}$) determinada.

Observación 2-7

Los tensores material y espacial de deformación $\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$ y $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$ contienen información sobre los estiramientos (y los alargamientos unitarios) para cualquier dirección en un entorno diferencial de un partícula dada, tal como ponen de manifiesto las ecuaciones (2.30) y (2.31).

Ejemplo 2-3 – *El tensor espacial de deformación para un cierto movimiento es:*

$$\mathbf{e}(\mathbf{x},t)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -te^{tz} \\ 0 & 0 & 0 \\ -te^{tz} & 0 & t(2e^{tz}-e^{t}) \end{bmatrix}$$

Calcular la longitud, en el instante $t=0$ *del segmento que en el instante* $t=2$ *es rectilíneo y une los puntos* $\mathbf{a}\equiv(0,0,0)$ *y* $\mathbf{b}\equiv(1,1,1)$.

Se conoce la forma y posición geométrica del segmento material en el instante $t=2$. En el instante $t=0$ (instante de referencia) el segmento no es necesariamente rectilíneo y no se conocen las posiciones de sus extremos **A** y **B** (ver Figura 2-5). Para conocer su longitud hay que aplicar la ecuación (2.31):

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{1-2\,\mathbf{t}\cdot\mathbf{e}\cdot\mathbf{t}}}=\frac{ds}{dS}\quad\Rightarrow\quad dS=\frac{1}{\lambda}ds$$

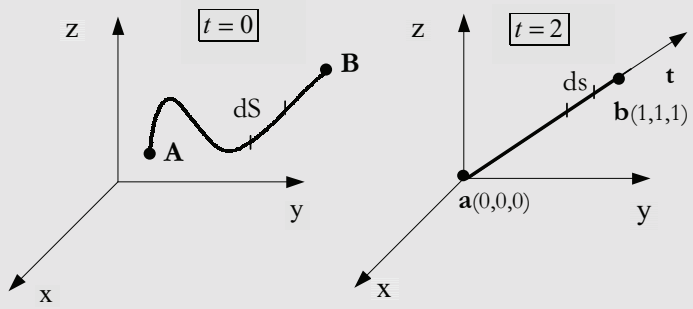


Figura 2-5

para un vector de dirección en la configuración espacial **t** de valor: $\mathbf{t}=\frac{1}{\sqrt{3}}[1,\ \ 1,\ \ 1]^T$ obteniéndose:

$$\mathbf{t}\cdot\mathbf{e}\cdot\mathbf{t}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & -te^{tz} \\ 0 & 0 & 0 \\ -te^{tz} & 0 & t(2e^{tz}-e^{t}) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{3}te^{t}$$

$$\Rightarrow\quad\lambda=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{3}te^{t}}}\quad\Rightarrow\quad\lambda\big|_{t=2}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{3}e^{2}}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+4e^{2}}}$$

$$\Rightarrow\quad l_{AB}=\int_A^B dS=\int_a^b\frac{1}{\lambda}ds=\frac{1}{\lambda}\underbrace{\int_a^b ds}_{l_{ab}}=\frac{1}{\lambda}l_{ab}=\frac{1}{\lambda}\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad l_{AB}=\sqrt{3+4e^{2}}$$

2.6 Variación de ángulos

Consideremos ahora una partícula P y otras dos partículas Q y R, situadas en un entorno diferencial de P en la configuración material, ver Figura 2-6, y las

mismas partículas ocupando las posiciones espaciales P', Q' y R'. Se plantea ahora la relación entre los ángulos que forman los correspondientes segmentos diferenciales en la configuración de referencia (ángulo $\boldsymbol{\Theta}$), y en la configuración actual (ángulo $\boldsymbol{\theta}$).

A partir de las ecuaciones (2.2)y (2.6), aplicadas a los vectores diferenciales que separan las partículas puede escribirse,

$$\begin{cases} d\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{X}^{(1)} \\ d\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{X}^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{F}^{-1}\cdot d\mathbf{x}^{(1)} \\ d\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{F}^{-1}\cdot d\mathbf{x}^{(2)} \end{cases} \tag{2.32}$$

y por la propia definición de los vectores unitarios $\mathbf{T}^{(1)}, \mathbf{T}^{(2)}, \mathbf{t}^{(1)}$ y $\mathbf{t}^{(2)}$ que definen las correspondientes direcciones en la Figura 2-6:

$$\begin{cases} d\mathbf{X}^{(1)} = dS^{(1)}\,\mathbf{T}^{(1)} \\ d\mathbf{X}^{(2)} = dS^{(2)}\,\mathbf{T}^{(2)} \end{cases} \qquad \begin{cases} d\mathbf{x}^{(1)} = ds^{(1)}\,\mathbf{t}^{(1)} \\ d\mathbf{x}^{(2)} = ds^{(2)}\,\mathbf{t}^{(2)} \end{cases} \tag{2.33}$$

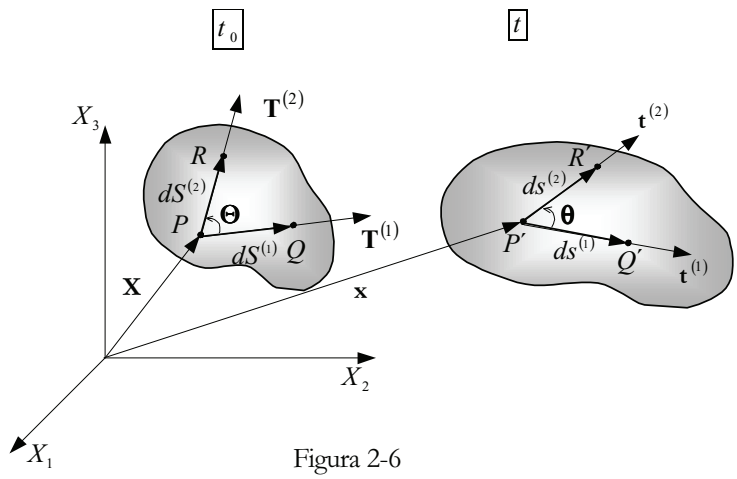


Figura 2-6

y, finalmente, por la definición (2.26) de los correspondientes estiramientos:

$$\begin{cases} ds^{(1)} = \lambda^{(1)}\,dS^{(1)} \\ ds^{(2)} = \lambda^{(2)}\,dS^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dS^{(1)} = \dfrac{1}{\lambda^{(1)}}\,ds^{(1)} \\ dS^{(2)} = \dfrac{1}{\lambda^{(2)}}\,ds^{(2)} \end{cases} \tag{2.34}$$

Planteando ahora el producto escalar de los vectores $d\mathbf{x}^{(1)}\cdot d\mathbf{x}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} ds^{(1)}\,ds^{(2)}\cos\theta &= \left|d\mathbf{x}^{(1)}\right|\cdot\left|d\mathbf{x}^{(2)}\right|\cos\theta = d\mathbf{x}^{(1)}\cdot d\mathbf{x}^{(2)} = \left[d\mathbf{x}^{(1)}\right]^T\cdot\left[d\mathbf{x}^{(2)}\right] = \\ &= \left[\mathbf{F}\cdot d\mathbf{X}^{(1)}\right]^T\cdot\left[\mathbf{F}\cdot d\mathbf{X}^{(2)}\right] = d\mathbf{X}^{(1)}\cdot\underbrace{\left(\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F}\right)}_{2\mathbf{E}+\mathbf{1}}\cdot d\mathbf{X}^{(2)} = \\ &= dS^{(1)}\,\mathbf{T}^{(1)}\cdot(2\mathbf{E}+\mathbf{1})\cdot\mathbf{T}^{(2)}\,dS^{(2)} = \frac{1}{\lambda^{(1)}}\,ds^{(1)}\,\mathbf{T}^{(1)}\cdot(2\mathbf{E}+\mathbf{1})\cdot\mathbf{T}^{(2)}\,\frac{1}{\lambda^{(2)}}\,ds^{(2)} = \\ &= ds^{(1)}ds^{(2)}\,\frac{1}{\lambda^{(1)}}\,\frac{1}{\lambda^{(2)}}\,\mathbf{T}^{(1)}\cdot(2\mathbf{E}+\mathbf{1})\cdot\mathbf{T}^{(2)} \end{aligned} \tag{2.35}$$

y comparando los términos inicial y final de la ecuación (2.35) se obtiene:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{T}^{(1)} \cdot (\mathbf{1} + 2\mathbf{E}) \cdot \mathbf{T}^{(2)}}{\lambda^{(1)}\,\lambda^{(2)}} \tag{2.36}$$

donde los estiramientos $\lambda^{(1)}$ y $\lambda^{(2)}$ pueden obtenerse aplicando la expresión (2.30) a las direcciones $\mathbf{T}^{(1)}$ y $\mathbf{T}^{(2)}$ llegándose a:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathbf{T}^{(1)} \cdot (\mathbf{1} + 2\mathbf{E}) \cdot \mathbf{T}^{(2)}}{\sqrt{1 + 2\,\mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{(1)}}\ \sqrt{1 + 2\,\mathbf{T}^{(2)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{(2)}}}} \tag{2.37}$$

De un modo análogo, operando en la configuración de referencia, puede obtenerse el ángulo Θ entre los segmentos diferenciales $d\mathbf{X}^{(1)}$ y $d\mathbf{X}^{(2)}$ (en función de $\mathbf{t}^{(1)}$, $\mathbf{t}^{(2)}$ y $\mathbf{e}$) como:

$$\boxed{\cos\Theta = \frac{\mathbf{t}^{(1)} \cdot (\mathbf{1} - 2\mathbf{e}) \cdot \mathbf{t}^{(2)}}{\sqrt{1 - 2\,\mathbf{t}^{(1)} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{t}^{(1)}}\ \sqrt{1 - 2\,\mathbf{t}^{(2)} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{t}^{(2)}}}} \tag{2.38}$$

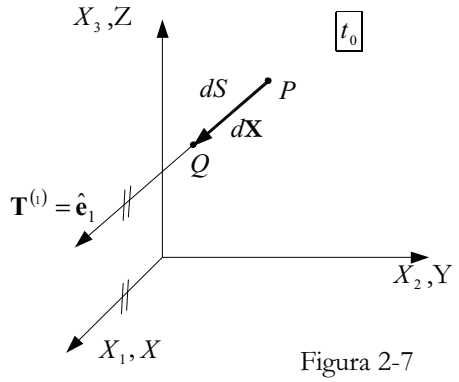
Observación 2-8

De forma similar a lo comentado en la Observación 2-7 los tensores material y espacial de deformación, $\mathbf{E}(\mathbf{X},t)$ y $\mathbf{e}(\mathbf{x},t)$, también contienen información sobre las variaciones de los ángulos entre segmentos diferenciales, en el entorno de una partícula, durante el proceso de deformación. Estos hechos serán la base para proporcionar una interpretación física de las componentes de los tensores de deformación en el apartado 2.7 .

2.7 Interpretación física de los tensores de deformación

2.7.1 Tensor material de deformación

Considérese un segmento $\overline{PQ}$, orientado paralelamente al eje X_1 en la configuración de referencia (ver Figura 2-7). Antes de la deformación $\overline{PQ}$ tiene una longitud conocida $dS = dX$.



$$\mathbf{T}^{(1)} \equiv \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$d\mathbf{X} \equiv \begin{Bmatrix} dS \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Figura 2-7

Se pretende conocer la longitud de $\overline{P'Q'}$ después de la deformación. Para ello consideremos el tensor material de deformación $\mathbf{E}$ dado por sus componentes:

$$E=\begin{bmatrix} E_{XX} & E_{XY} & E_{XZ} \\ E_{XY} & E_{YY} & E_{YZ} \\ E_{XZ} & E_{YZ} & E_{ZZ} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

En consecuencia:

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{T}=[\mathbf{T}]^T\cdot[\mathbf{E}]\cdot\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=E_{11} \tag{2.40}$$

El estiramiento en la dirección material X_1 puede obtenerse ahora sustituyendo el valor $\mathbf{T}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{T}$ en la expresión del estiramiento (2.30), obteniéndose: $\lambda_1=\sqrt{1+2E_{11}}$. De modo análogo se pueden considerar segmentos orientados en las direcciones $X_2\equiv Y$ y $X_3\equiv Z$ y obtener los valores λ_2 y λ_3, resultando:

$$\begin{array}{lll} \lambda_1=\sqrt{1+2E_{11}}=\sqrt{1+2E_{XX}} & \Rightarrow & \varepsilon_X=\lambda_X-1=\sqrt{1+2E_{XX}}-1 \\ \lambda_2=\sqrt{1+2E_{22}}=\sqrt{1+2E_{YY}} & \Rightarrow & \varepsilon_Y=\lambda_Y-1=\sqrt{1+2E_{YY}}-1 \\ \lambda_3=\sqrt{1+2E_{33}}=\sqrt{1+2E_{ZZ}} & \Rightarrow & \varepsilon_Z=\lambda_Z-1=\sqrt{1+2E_{ZZ}}-1 \end{array} \tag{2.41}$$

Observación 2-9

En las componentes E_{XX}, E_{YY} y E_{ZZ} (o E_{11}, E_{22} y E_{33}) de la diagonal principal del tensor $\mathbf{E}$ (denominadas *deformaciones longitudinales*) está contenida la información sobre el estiramiento y los alargamientos unitarios de segmentos diferenciales inicialmente (*en la configuración de referencia*) orientados en direcciones X, Y y Z.

- Si $E_{XX}=0\Rightarrow\varepsilon_X=0\Rightarrow$ No hay alargamiento en la dirección X.
- Si $E_{YY}=0\Rightarrow\varepsilon_Y=0\Rightarrow$ No hay alargamiento en la dirección Y.
- Si $E_{ZZ}=0\Rightarrow\varepsilon_Z=0\Rightarrow$ No hay alargamiento en la dirección Z.

Consideremos ahora el ángulo entre los segmentos PQ (paralelo al eje X_1) y PR, (paralelo al eje X_2) siendo Q y R, dos partículas del entorno diferencial de P en la configuración de material y P',Q' y R' las respectivas posiciones en la configuración espacial(ver Figura 2-8). Conocido el ángulo ($\Theta=\frac{\pi}{2}$) entre los segmentos en la configuración de referencia es posible conocer el ángulo θ en la configuración actual, utilizando la expresión (2.37) y teniendo en cuenta la ortogonalidad de ambos ($\mathbf{T}^{(1)}\cdot\mathbf{T}^{(2)}=0$) y las igualdades $\mathbf{T}^{(1)}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{T}^{(1)}=E_{11}$, $\mathbf{T}^{(2)}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{T}^{(2)}=E_{22}$ y $\mathbf{T}^{(1)}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{T}^{(2)}=E_{12}$,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{T}^{(1)}\cdot(\mathbf{1}+2\mathbf{E})\cdot\mathbf{T}^{(2)}}{\sqrt{1+2\,\mathbf{T}^{(1)}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{T}^{(1)}}\ \sqrt{1+2\,\mathbf{T}^{(2)}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{T}^{(2)}}} = \frac{2\,E_{12}}{\sqrt{1+2\,\mathrm{E}_{11}}\ \sqrt{1+2\,\mathrm{E}_{22}}} \tag{2.42}$$

o lo que es lo mismo:

$$\theta \equiv \theta_{xy} = \frac{\pi}{2} - arcsin\frac{2E_{XY}}{\sqrt{1+2\,E_{\mathrm{XX}}}\ \sqrt{1+2\,E_{\mathrm{YY}}}} \tag{2.43}$$

y el incremento del ángulo final respecto a su valor inicial resulta:

$$\Delta\Theta_{XY} = \theta_{xy} - \underbrace{\Theta_{XY}}_{\frac{\pi}{2}} = -arcsin\frac{2E_{XY}}{\sqrt{1+2\,E_{\mathrm{XX}}}\ \sqrt{1+2\,E_{\mathrm{YY}}}} \tag{2.44}$$

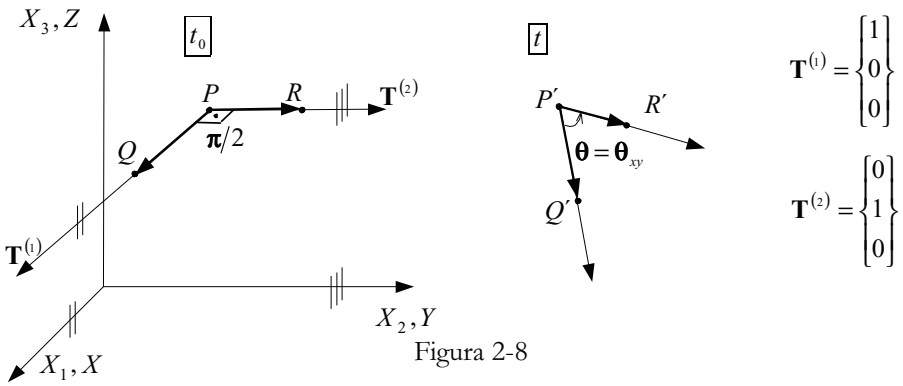


Figura 2-8

Resultados análogos se obtienen partiendo de pares de segmentos orientados según las distintos ejes de coordenadas llegándose a:

$$\begin{aligned}
\Delta\Theta_{XY} &= -arcsin\frac{2E_{XY}}{\sqrt{1+2\,E_{\mathrm{XX}}}\ \sqrt{1+2\,E_{\mathrm{YY}}}}\\
\Delta\Theta_{XZ} &= -arcsin\frac{2E_{XZ}}{\sqrt{1+2\,E_{\mathrm{XX}}}\ \sqrt{1+2\,E_{\mathrm{ZZ}}}}\\
\Delta\Theta_{YZ} &= -arcsin\frac{2E_{YZ}}{\sqrt{1+2\,E_{\mathrm{YY}}}\ \sqrt{1+2\,E_{\mathrm{ZZ}}}}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Observación 2-10

En las componentes E_{XY}, E_{XZ} y E_{YZ} (o E_{12}, E_{13} y E_{23}) del tensor $\mathbf{E}$ (denominadas *deformaciones transversales*) está contenida la información sobre la variación de los ángulos entre segmentos diferenciales inicialmente (en la configuración material) orientados en las direcciones X, Y y Z.

- Si $E_{XY} = 0 \Rightarrow$ La deformación no produce variación del ángulo de dos segmentos inicialmente situados en las direcciones X e Y.
- Si $E_{XZ} = 0 \Rightarrow$ La deformación no produce variación del ángulo de dos segmentos inicialmente situados en las direcciones X y Z.
- Si $E_{YZ} = 0 \Rightarrow$ La deformación no produce variación del ángulo de dos segmentos inicialmente situados en las direcciones Y y Z.

En la Figura 2-9 se presenta la interpretación física de las componentes del tensor material de deformación sobre un paralelepípedo elemental en el entorno de una partícula P con aristas orientadas según los ejes coordenados.

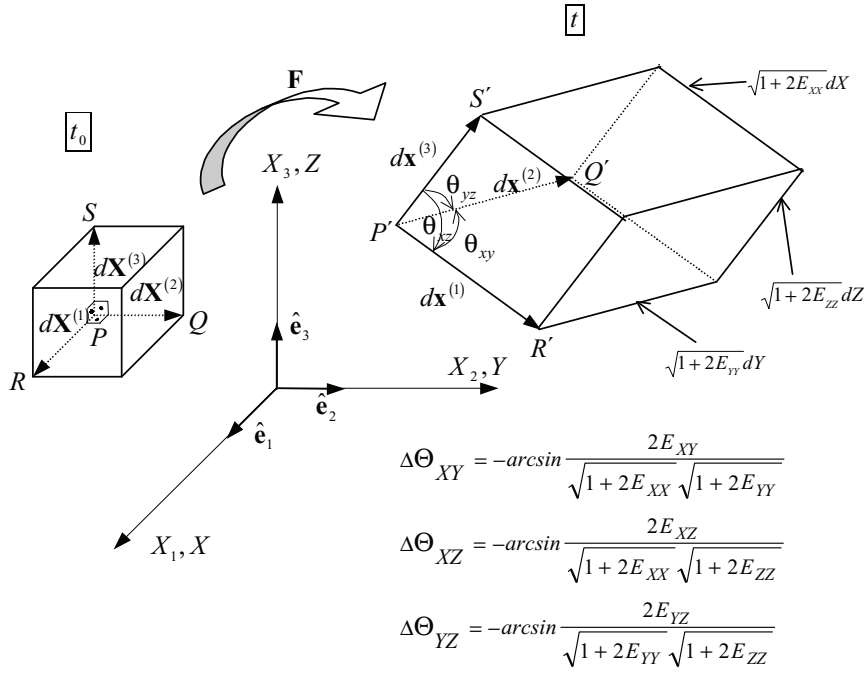


Figura 2-9 – Interpretación física del tensor material de deformación

2.7.2 Tensor espacial de deformación

Argumentos parecidos a los de la sección 2.7.1 permiten interpretar a su vez las componentes del tensor espacial deformación:

$$\mathbf{e} \equiv \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

Las componentes de la diagonal principal (deformaciones longitudinales) pueden interpretarse en función de los estiramientos y alargamientos unitarios de segmentos diferenciales orientados según los ejes coordenados *en la configuración actual o deformada*:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-2e_{11}}} = \frac{1}{\sqrt{1-2e_{xx}}} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{1}{\sqrt{1-2e_{xx}}} - 1 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{\sqrt{1-2e_{22}}} = \frac{1}{\sqrt{1-2e_{yy}}} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_y = \frac{1}{\sqrt{1-2e_{yy}}} - 1 \\ \lambda_3 &= \frac{1}{\sqrt{1-2e_{33}}} = \frac{1}{\sqrt{1-2e_{zz}}} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_z = \frac{1}{\sqrt{1-2e_{zz}}} - 1 \end{aligned} \tag{2.47}$$

mientras que las componentes de fuera de la diagonal principal (deformaciones transversales) contienen información sobre la variación de ángulos entre

segmentos diferenciales orientados según los ejes coordenados *en la configuración actual o deformada*:

$$\begin{aligned}
\Delta\theta_{xy} &= \frac{\pi}{2} - \Theta_{XY} = -arcsin\frac{2e_{xy}}{\sqrt{1-2\,e_{xx}}\,\sqrt{1-2\,e_{yy}}} \\
\Delta\theta_{xz} &= \frac{\pi}{2} - \Theta_{XZ} = -arcsin\frac{2e_{xz}}{\sqrt{1-2\,e_{xx}}\,\sqrt{1-2\,e_{zz}}} \\
\Delta\theta_{yz} &= \frac{\pi}{2} - \Theta_{YZ} = -arcsin\frac{2e_{yz}}{\sqrt{1-2\,e_{yy}}\,\sqrt{1-2\,e_{zz}}}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

El resumen de la correspondiente interpretación física se presenta en la Figura 2-10:

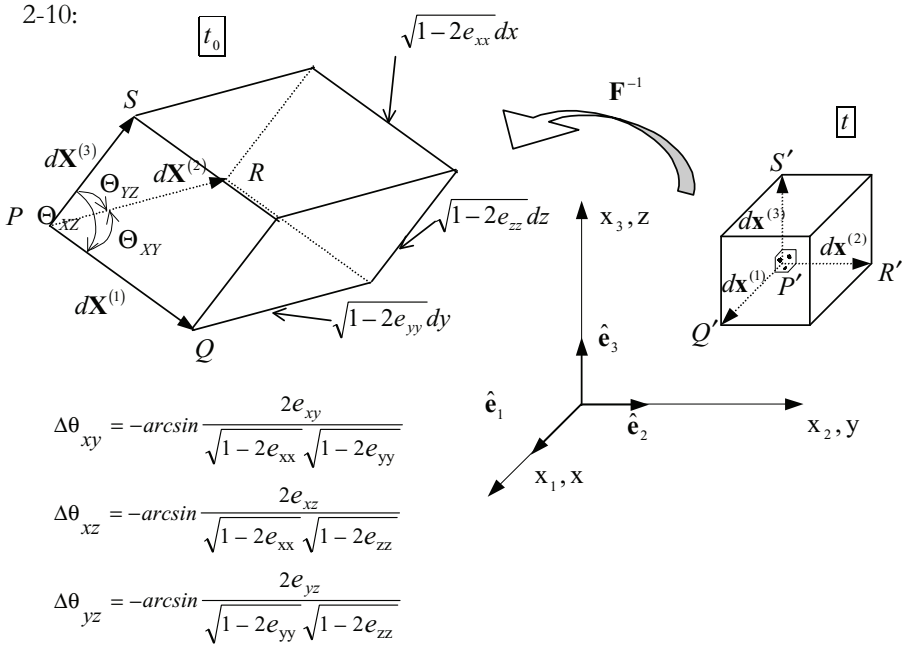


Figura 2-10 – Interpretación física del tensor espacial de deformación

2.8 Descomposición polar

El *teorema de descomposición polar* del análisis tensorial establece que dado un tensor de segundo orden $\mathbf{F}$ tal que $|\mathbf{F}| > 0$, existen un tensor ortogonal $\mathbf{Q}$, y dos tensores simétricos $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$:

RECORDATORIO

Un tensor de segundo orden $\mathbf{Q}$ es ortogonal si se verifica:

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{U} &\overset{not}{=} \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}} \\
\mathbf{V} &\overset{not}{=} \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T} \\
\mathbf{Q} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F}
\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q} \tag{2.49}$$

La descomposición (2.49) es única para cada tensor $\mathbf{F}$ y se denomina *descomposición polar por la izquierda* ($\mathbf{F} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}$) o *descomposición polar por la derecha* ($\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}$) y a los tensores $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ tensores derecho e izquierdo de estiramiento, respectivamente.

NOTA

Para obtener la raíz cuadrada de un tensor se procede a diagonalizar el tensor, se obtiene la raíz cuadrada de los elementos de la diagonal de la matriz de componentes diagonalizada y se deshace la diagonalización.

Observación 2-11

Un tensor ortogonal $\mathbf{Q}$ recibe el nombre de *tensor de rotación* y a la aplicación $\mathbf{y} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$ se la denomina *rotación*. Una rotación tiene las siguientes propiedades:

- Cuando se aplica a cualquier vector $\mathbf{x}$, el resultado es un vector $\mathbf{y} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$ del mismo módulo:

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = [\mathbf{y}]^T \cdot [\mathbf{y}] = [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}]^T \cdot [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}] = \mathbf{x} \cdot \underbrace{\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}}_{\mathbf{1}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$$

- El resultado de multiplicar (aplicar) el tensor ortogonal $\mathbf{Q}$ a dos vectores $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ con el mismo origen y que forman entre sí un ángulo α, mantiene el mismo ángulo entre las imágenes ($\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^{(2)}$):

$$\frac{\mathbf{y}^{(1)} \cdot \mathbf{y}^{(2)}}{\|\mathbf{y}^{(1)}\| \|\mathbf{y}^{(2)}\|} = \frac{\mathbf{x}^{(1)} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^{(2)}}{\|\mathbf{y}^{(1)}\| \|\mathbf{y}^{(2)}\|} = \frac{\mathbf{x}^{(1)} \cdot \mathbf{x}^{(2)}}{\|\mathbf{x}^{(1)}\| \|\mathbf{x}^{(2)}\|} = \cos\alpha$$

En consecuencia la aplicación (rotación) $\mathbf{y} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$ mantiene los ángulos y las distancias.

Considerando ahora el tensor gradiente de la deformación y la relación fundamental (2.2) ($d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$) y la descomposición polar (2.49) se obtiene:

NOTACION

Se utiliza aquí la notación ($\circ$) para indicar la composición de dos aplicaciones ξ y φ:
$\mathbf{z} = \varphi \circ \xi(\mathbf{x})$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}) \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{V} \cdot (\overbrace{\mathbf{Q} \cdot d\mathbf{X}}^{\text{rotación}}) \quad \overbrace{\qquad\qquad}^{\text{deformación}} \tag{2.50}$$

$$\boxed{\mathbf{F}(\bullet) \equiv \text{deformación} \overset{\text{not}}{\circ} \text{rotación}\,(\bullet)}$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}) \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{Q} \cdot (\overbrace{\mathbf{U} \cdot d\mathbf{X}}^{\text{deformación}}) \quad \overbrace{\qquad\qquad}^{\text{rotación}} \tag{2.51}$$

$$\boxed{\mathbf{F}(\bullet) \equiv \text{rotación} \circ \text{deformación}\,(\bullet)}$$

Observación 2-12

Las ecuaciones (2.50) establecen que el movimiento relativo en el entorno de una partícula durante el proceso de deformación (caracterizado por el tensor $\mathbf{F}$) puede entenderse como la *composición* de una *rotación* (caracterizada por el tensor de rotación $\mathbf{Q}$, que mantiene ángulos y distancias) y una *deformación propiamente dicha* (que modifica ángulos y distancias) caracterizada por el tensor $\mathbf{V}$ (ver Figura 2-11).

Observación 2-13

- Alternativamente las ecuaciones (2.51) permiten caracterizar el movimiento relativo en el entorno de una partícula durante el proceso de deformación como la s*uperposición* de una *deformación propiamente dicha* (caracterizada por el tensor $\mathbf{U}$) y una *rotación* (caracterizada por el tensor de rotación $\mathbf{Q}$).
- Un movimiento de sólido rígido es un caso particular de deformación caracterizado por $\mathbf{U}=\mathbf{V}=\mathbf{1}$ y $\mathbf{Q}=\mathbf{F}$.

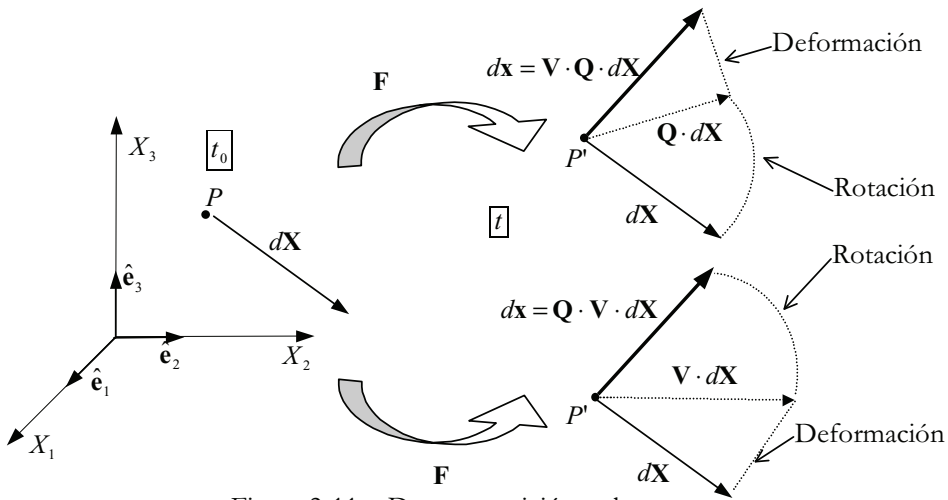


Figura 2-11 – Descomposición polar

2.9 Variación de volumen

Consideremos una partícula P del medio continuo en la configuración de referencia, $(t=0)$ que tiene asociado un volumen diferencial dV_0 (ver Figura 2-12) que queda caracterizado mediante las posiciones de otras tres partículas Q, R y S de su entorno diferencial, alineadas con P según tres direcciones arbitrarias. El diferencial de volumen dV_t, asociado a la misma partícula en la configuración actual (a tiempo t), quedará asimismo caracterizado por las correspondientes puntos espaciales P',Q', R' y S' de la figura (cuyas posiciones configurarán un paralelepípedo que ya no está orientado según los ejes coordenados como ocurre en la configuración material).

Sean $d\mathbf{X}^{(1)}$, $d\mathbf{X}^{(2)}$ y $d\mathbf{X}^{(3)}$ los vectores de posición relativos entre partículas en la configuración material, y $d\mathbf{x}^{(1)}=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{X}^{(1)}$, $d\mathbf{x}^{(2)}=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{X}^{(2)}$ y $d\mathbf{x}^{(3)}=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{X}^{(3)}$ sus homólogos en la configuración espacial. Evidentemente se cumplen las relaciones:

$$\begin{cases} d\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{X}^{(i)} \\ dx_j^{(i)} = F_{jk}\cdot dX_k^{(i)} \qquad i,j,k\in\{1,2,3\} \end{cases} \tag{2.52}$$

RECORDATORIO

El volumen de un paralelepípedo puede calcularse como el producto mixto $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ de los vectores-arista $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ que concurren en cualquiera de sus vértices.
Por otra parte, el producto mixto de tres vectores es el determinante de la matriz constituida por las componentes de dichos vectores ordenadas en filas

Los volúmenes asociados a la partícula en ambas configuraciones pueden escribirse como:

$$dV_0 = \left(d\mathbf{X}^{(1)}\times d\mathbf{X}^{(2)}\right)\cdot d\mathbf{X}^{(3)} = \det\underbrace{\begin{bmatrix} dX_1^{(1)} & dX_2^{(1)} & dX_3^{(1)} \\ dX_1^{(2)} & dX_2^{(2)} & dX_3^{(2)} \\ dX_1^{(3)} & dX_2^{(3)} & dX_3^{(3)} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{M}]} = |\mathbf{M}|$$

$$dV_t = \left(d\mathbf{x}^{(1)}\times d\mathbf{x}^{(2)}\right)\cdot d\mathbf{x}^{(3)} = \det\underbrace{\begin{bmatrix} dx_1^{(1)} & dx_2^{(1)} & dx_3^{(1)} \\ dx_1^{(2)} & dx_2^{(2)} & dx_3^{(2)} \\ dx_1^{(3)} & dx_2^{(3)} & dx_3^{(3)} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{m}]} = |\mathbf{m}| \tag{2.53}$$

$$M_{ij} = dX_j^{(i)} \qquad m_{ij} = dx_j^{(i)}$$

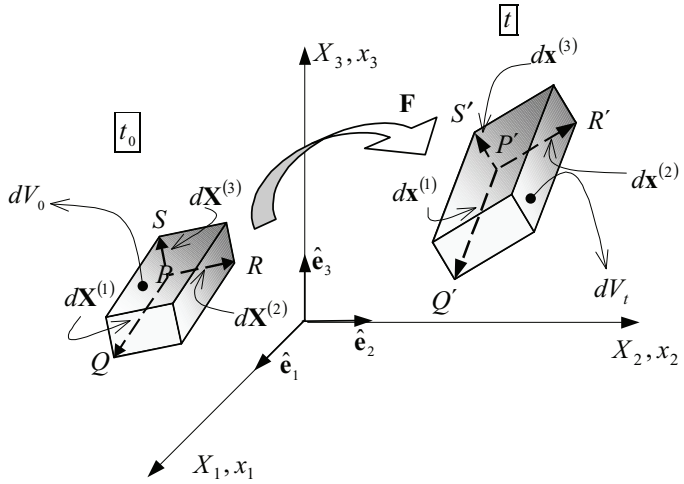


Figura 2-12 – Variación de un elemento diferencial de volumen

Por otro lado, considerando las expresiones (2.52) y (2.53) puede escribirse:

$$m_{ij} = dx_j^{(i)} = F_{jk}\,dX_k^{(i)} = F_{jk}\,M_{ik} = M_{ik}\,F_{kj}^T \quad\Rightarrow\quad \mathbf{m} = \mathbf{M}\cdot\mathbf{F}^T \tag{2.54}$$

y, en consecuencia:

NOTA

Se utilizan aquí las expresiones:
$|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$ y
$|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$

$$\left.\begin{aligned} dV_t &= |\mathbf{m}| = |\mathbf{M}\cdot\mathbf{F}^T| = |\mathbf{M}||\mathbf{F}^T| = |\mathbf{F}|\underbrace{|\mathbf{M}|}_{dV_0} = |\mathbf{F}|\,dV_0 \\ dV_t &= dV(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t) = |\mathbf{F}(\mathbf{X},t)|\,dV(\mathbf{X},0) = |\mathbf{F}|_t\,dV_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \boxed{dV_t = |\mathbf{F}|_t\,dV_0} \tag{2.55}$$

2.10 Variación del área

Consideremos ahora el diferencial de área dA asociado a una partícula P en la configuración de referencia y su variación a lo largo del tiempo. Para definir dicho diferencial de área, consideraremos dos partículas Q y R del entorno diferencial de P, cuyas posiciones relativas respecto a la misma son $d\mathbf{X}^{(1)}$ y $d\mathbf{X}^{(2)}$ (ver Figura 2-13). Consideremos también una partícula auxiliar cualquiera S y su vector de posición relativo $d\mathbf{X}^{(3)}$. Asociado al *escalar diferencial de área*, dA, definiremos el *vector diferencial de área* $d\mathbf{A} = dA\,\mathbf{N}$ cuyo módulo es dA y cuya dirección es la de la normal $\mathbf{N}$.

En la configuración actual, en el tiempo t, la partícula ocupará un punto espacial P', y tendrá asociado un diferencial de área da que, a su vez, define un vector diferencial de área $d\mathbf{a} = da\,\mathbf{n}$, donde $\mathbf{n}$ es la correspondiente normal. Consideremos también las posiciones de las demás partículas Q' y R' y S' y sus vectores de posición relativos $d\mathbf{x}^{(1)}$, $d\mathbf{x}^{(2)}$ y $d\mathbf{x}^{(3)}$.

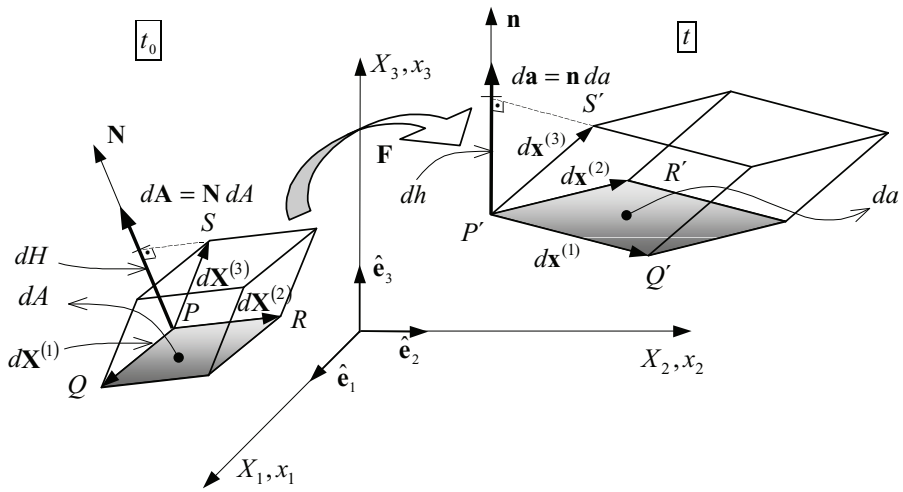


Figura 2-13 – Variación del área

Los volúmenes dV_0 y dV_t de los respectivos paralelepípedos podrán calcularse como:

$$\begin{aligned} dV_0 &= dH\,dA = \underbrace{d\mathbf{X}^{(3)}\cdot\mathbf{N}}_{dH}\,dA = d\mathbf{X}^{(3)}\cdot\underbrace{\mathbf{N}\,dA}_{d\mathbf{A}} = d\mathbf{A}\cdot d\mathbf{X}^{(3)} \\ dV_t &= dh\,da = \underbrace{d\mathbf{x}^{(3)}\cdot\mathbf{n}}_{dh}\,da = d\mathbf{x}^{(3)}\cdot\underbrace{\mathbf{n}\,da}_{d\mathbf{a}} = d\mathbf{a}\cdot d\mathbf{x}^{(3)} \end{aligned} \tag{2.56}$$

y teniendo en cuenta que $d\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{X}^{(3)}$, así como la ecuación de cambio de volumen (2.55), puede escribirse:

$$d\mathbf{a}\cdot\mathbf{F}\cdot d\mathbf{X}^{(3)} = d\mathbf{a}\cdot d\mathbf{x}^{(3)} = dV_t = |\mathbf{F}|\,dV_0 = |\mathbf{F}|\,d\mathbf{A}\cdot d\mathbf{X}^{(3)} \quad \forall d\mathbf{X}^{(3)} \tag{2.57}$$

Comparando el primer y último término de (2.57), y teniendo en cuenta que la posición relativa de la partícula S es cualquiera (y por tanto también lo es el vector $d\mathbf{X}^{(3)}$), se llega finalmente a:

$$d\mathbf{a}\cdot\mathbf{F} = |\mathbf{F}|\,d\mathbf{A} \quad\Rightarrow\quad \boxed{d\mathbf{a} = |\mathbf{F}|\,d\mathbf{A}\cdot\mathbf{F}^{-1}} \tag{2.58}$$

NOTA

Se tiene en cuenta aquí el siguiente teorema del álgebra tensorial: dados dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, si se cumple que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{x}$ para todo vector $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Para obtener una relación entre los *escalares diferencial de área* dA y da se sustituyen las expresiones $d\mathbf{A} = \mathbf{N}\,dA$ y $d\mathbf{a} = \mathbf{n}\,da$ en la ecuación (2.58) y se toman módulos:

$$da\,\mathbf{n} = |\mathbf{F}|\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}^{-1}dA \quad \Rightarrow da \quad = |\mathbf{F}|\,\left\|\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}^{-1}\right\|\,dA \tag{2.59}$$

2.11 Deformación infinitesimal

La teoría de la deformación infinitesimal (también denominada *teoría de pequeñas deformaciones*) se basa en dos hipótesis simplificativas sobre la teoría general (o de *deformación finita*) vista en apartados anteriores (ver Figura 2-14).

Hipótesis:

1) *Los desplazamientos son muy pequeños* frente a las dimensiones típicas del medio continuo ($\|\mathbf{u}\| << \|\mathbf{X}\|$).

2) *Los gradientes de los desplazamientos son muy pequeños* (infinitesimales).

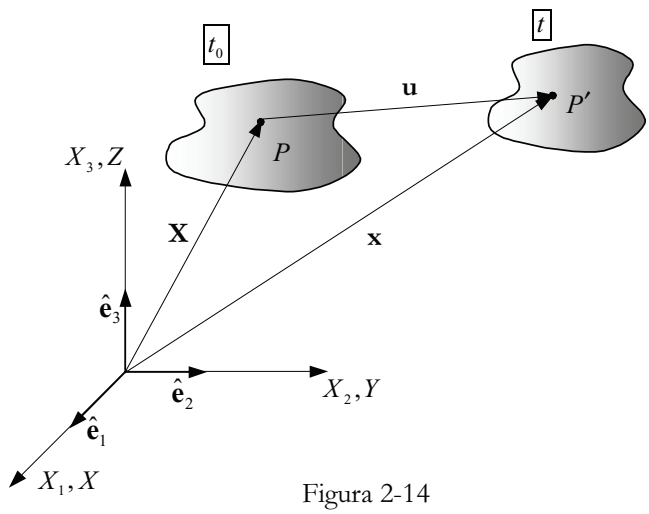


Figura 2-14

En virtud de la primera hipótesis las configuraciones de referencia, Ω_0 y actual, Ω_t, están muy próximas entre sí y se consideran indistinguibles una de otra. En consecuencia, las coordenadas materiales y espaciales coinciden y ya no tiene sentido hablar de descripciones material y espacial:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \cong \mathbf{X} \\ x_i = X_i + u_i \cong X_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{U}(\mathbf{X},t) \overset{not}{=} \mathbf{u}(\mathbf{X},t) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x},t) \\ U_i(\mathbf{X},t) \overset{not}{=} u_i(\mathbf{X},t) \equiv u_i(\mathbf{x},t) \quad i \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{2.60}$$

La segunda hipótesis puede escribirse matemáticamente como:

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| << 1, \quad \forall i, j \in \{1,2,3\} \tag{2.61}$$

2.11.1 Tensores de deformación. Tensor de deformación infinitesimal

Los tensores gradiente material y gradiente espacial de los desplazamientos coinciden. En efecto, a la vista de la ecuación (2.60):

$$\begin{cases} x_j = X_j \\ u_i(\mathbf{x},t) = U_i(\mathbf{X},t) \end{cases} \Rightarrow j_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = J_{ij} \Rightarrow \mathbf{j} = \mathbf{J} \tag{2.62}$$

y el tensor material de deformación resulta ser:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T + \mathbf{J}^T\mathbf{J}\right) \cong \frac{1}{2}\left(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T\right) \\ E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}_{<<1}\right) \cong \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \end{cases} \tag{2.63}$$

donde se ha tenido en cuenta el carácter de infinitésimo de segundo orden del término $\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$. Operando similarmente con el tensor espacial de deformación:

$$\begin{cases} \mathbf{e} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{j} + \mathbf{j}^T - \mathbf{j}^T\mathbf{j}\right) \cong \frac{1}{2}\left(\mathbf{j} + \mathbf{j}^T\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T\right) \\ e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}_{<<1}\right) \cong \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \end{cases} \tag{2.64}$$

Las ecuaciones (2.63) y (2.64) permiten definir *el tensor de deformación infinitesimal* (o tensor de pequeñas deformaciones) $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\text{Tensor de deformación infinitesimal} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T\right) \overset{not}{=} \boldsymbol{\nabla}^s\mathbf{u} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] \end{cases} \tag{2.65}$$

NOTACIÓN

Se define el operador *gradiente simétrico* $\boldsymbol{\nabla}^s$ mediante: $\boldsymbol{\nabla}^s(\bullet) = \frac{1}{2}\left[(\bullet)\otimes\boldsymbol{\nabla} + \boldsymbol{\nabla}\otimes(\bullet)\right]$

Observación 2-14

Bajo la hipótesis de deformación infinitesimal *los tensores material y espacial de deformación coinciden* y colapsan en el *tensor de deformación infinitesimal.*

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{e}(\mathbf{x},t) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$$

Observación 2-15

El tensor de deformación infinitesimal es simétrico, tal como se observa de su definición en la ecuación (2.65*):*

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \frac{1}{2}\left(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T\right)^T = \frac{1}{2}\left(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T\right) = \boldsymbol{\varepsilon}$$

Observación 2-16

Las componentes del tensor infinitesimal de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ *son infinitésimos* ($\varepsilon_{ij} << 1$). La demostración es evidente a partir de la ecuación (2.65) y la condición de infinitésimo de las componentes de $\mathbf{J} = \mathbf{j}$ (ver ecuación (2.61)).

Ejemplo 2-4 – *Para el movimiento del Ejemplo 2-1, determinar bajo qué condiciones constituye un caso de deformación infinitesimal. Para dicho caso obtener el tensor infinitesimal de deformación. Comparar con el resultado obtenido a partir de los tensores espacial y material de deformación del Ejemplo 2-2 considerando las hipótesis de deformación infinitesimal.*

a) *Las ecuaciones de movimiento* vienen dadas por $\begin{cases} x_1 = X_1 - AX_3 \\ x_2 = X_2 - AX_3 \\ x_3 = -AX_1 + AX_2 + X_3 \end{cases}$ de las cuales se obtiene el campo de desplazamientos: $\mathbf{U}(\mathbf{X},t) = \mathbf{x} - \mathbf{X} \equiv \begin{cases} U_1 = -AX_3 \\ U_2 = -AX_3 \\ U_3 = -AX_1 + AX_2 \end{cases}$. Es evidente que para que los desplazamientos sean infinitesimales debe cumplirse que A *sea un infinitésimo* ($A << 1$).

b) *Tensor de deformación:* El tensor gradiente de los desplazamientos $\mathbf{J}(\mathbf{X},t) = \mathbf{j}(\mathbf{x},t)$ vendrá dado por:

$$\mathbf{J} = \mathbf{U} \otimes \boldsymbol{\nabla} = \begin{bmatrix} -AX_3 \\ -AX_3 \\ -AX_1 + AX_2 \end{bmatrix} \left[\frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial X_2}, \frac{\partial}{\partial X_3} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -A \\ 0 & 0 & -A \\ -A & A & 0 \end{bmatrix}$$

y el tensor infinitesimal de deformación, de acuerdo con la ecuación (2.65), será:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla}^s \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -A \\ 0 & 0 & 0 \\ -A & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) *Tensores material y espacial de deformación*: En el Ejemplo 2-2 los tensores material y espacial de deformación resultan ser, respectivamente:

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} A^2 & -A^2 & -2A \\ -A^2 & A^2 & 0 \\ -2A & 0 & 2A^2 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$\mathbf{e}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3A^2-2A^4 & A^2+2A^4 & -2A-2A^3 \\ A^2+2A^4 & A^2-2A^4 & 2A^3 \\ -2A-2A^3 & 2A^3 & -2A^2 \end{bmatrix}$$

y despreciando los infinitésimos de segundo orden o superior ($A^4 << A^3 << A^2 << A$) resulta:

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -A \\ 0 & 0 & 0 \\ -A & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -A \\ 0 & 0 & 0 \\ -A & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{E}=\mathbf{e}=\boldsymbol{\varepsilon}$$

2.11.2 Estiramiento. Alargamiento unitario

Considerando la fórmula general (2.30) del estiramiento unitario en la dirección $\mathbf{T}\cong\mathbf{t}$ ($\lambda_t=\sqrt{1+2\mathbf{t}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{t}}$) y aplicando al mismo un desarrollo en serie de Taylor alrededor de 0 (teniendo en cuenta que $\mathbf{E}=\boldsymbol{\varepsilon}$ es infinitésimo y, por lo tanto también lo es $x=\mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{t}$), se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned}&\lambda_t=\sqrt{1+\underbrace{2\mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{t}}_{x}}\cong 1+\mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{t}\\ &\varepsilon_t=\lambda_t-1=\mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{t}\end{aligned}} \tag{2.66}$$

RECORDATORIO

El desarrollo en serie de Taylor de $\sqrt{1+x}$ en un entorno de $x=0$ es:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\\ +O\left(x^2\right)$$

2.11.3 Interpretación física de las deformaciones infinitesimales

Consideremos el tensor de deformaciones infinitesimales $\boldsymbol{\varepsilon}$ y sus componentes en el sistema de coordenadas $x_1\equiv x,\quad x_2\equiv y,\quad x_3\equiv z$ de la Figura 2-15:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

Consideremos el segmento diferencial $\overline{PQ}$ orientado en la configuración de referencia en la dirección del eje coordenado $x_1\equiv x$. El estiramiento λ_x y el alargamiento unitario ε_x en dicha dirección vienen dados, de acuerdo con la ecuación (2.66) con $\mathbf{t}=\{1,0,0\}^T$, por:

$$\lambda_x=1+\mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{t}=1+\varepsilon_{xx}\ \Rightarrow\ \varepsilon_x=\lambda-1=\varepsilon_{xx} \tag{2.68}$$

Lo que permite dar a la *componente* $\varepsilon_{xx}\equiv\varepsilon_{11}$ *el significado físico del alargamiento unitario* ε_x *en la dirección del eje coordenado* $x_1\equiv x$. Una interpretación similar puede darse a las demás componentes de la diagonal principal del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ ($\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz}$).

$$\boxed{\varepsilon_{xx}=\varepsilon_x\quad;\quad\varepsilon_{yy}=\varepsilon_y\quad;\quad\varepsilon_{zz}=\varepsilon_z} \tag{2.69}$$

Atendiendo ahora a las componentes de fuera de la diagonal principal de $\boldsymbol{\varepsilon}$, consideremos los segmentos diferenciales $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ orientados según las direcciones coordenadas x e y en la configuración de referencia y formando, por lo tanto, un ángulo $\Theta_{xy} = \dfrac{\pi}{2}$ en dicha configuración. Aplicando la ecuación (2.43), el incremento del ángulo correspondiente será:

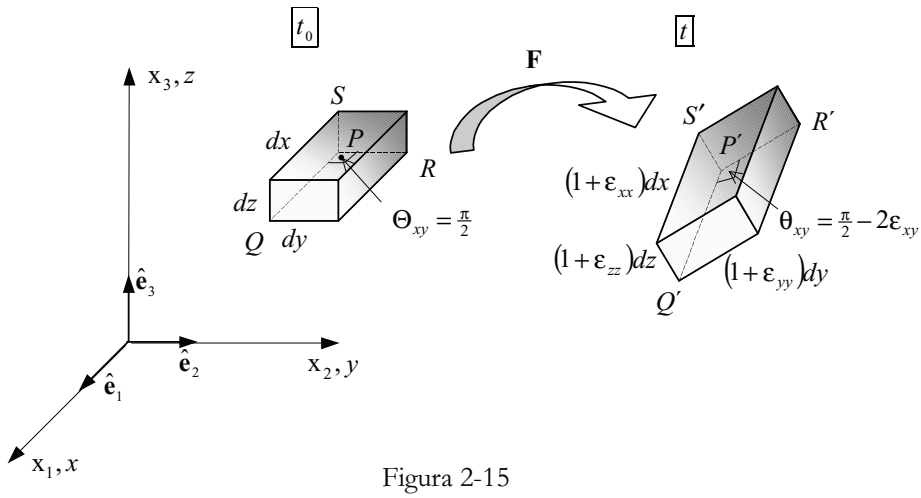


Figura 2-15

RECORDATORIO

El desarrollo en serie de Taylor de $\arcsin x$ en un entorno de $x = 0$ es:

$$\arcsin x = x + O(x^2)$$

$$\Delta\theta_{xy} = \theta_{xy} - \frac{\pi}{2} = -2\arcsin \frac{\varepsilon_{xy}}{\underbrace{\sqrt{1+2\varepsilon_{xx}}}_{\approx 1}\underbrace{\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}}_{\approx 1}} \cong -2\underbrace{\arcsin \varepsilon_{xy}}_{\approx \varepsilon_{xy}} = -2\varepsilon_{xy} \tag{2.70}$$

donde se ha tenido en cuenta el carácter infinitesimal de ε_{xx}, ε_{yy} y ε_{xy}. En consecuencia, de la ecuación (2.70) ε_{xy} puede interpretarse *como menos el semi-incremento, producido por la deformación, del ángulo entre dos segmentos diferenciales inicialmente orientados según las direcciones coordenadas x e y*. Una interpretación análoga puede encontrarse para las demás componentes ε_{xz} y ε_{yz}:

$$\boxed{\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2}\Delta\theta_{xy} \quad ; \quad \varepsilon_{xz} = -\frac{1}{2}\Delta\theta_{xz} \quad ; \quad \varepsilon_{yz} = -\frac{1}{2}\Delta\theta_{yz}} \tag{2.71}$$

2.11.4 Deformaciones Ingenieriles. Vector de deformaciones ingenieriles

Hay una importante tradición en ingeniería en usar una particular denominación para las componentes del tensor de deformación infinitesimal, lo que constituye la denominada *notación ingenieril*, en contraposición con la *notación científica* generalmente usada en Mecánica de Medios Continuos. Ambas notaciones se pueden sintetizar como sigue:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \overbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}}^{\text{notación científica}} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \equiv \overbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}}^{\text{notación ingenieril}} \tag{2.72}$$

Observación 2-17

Las componentes del tensor de deformación situadas en la diagonal principal (*denominadas deformaciones longitudinales*) se denotan por $\varepsilon_{(\bullet)}$ y coinciden con los *alargamientos unitarios en las direcciones de los ejes coordenados*. Valores positivos de las deformaciones longitudinales ($\varepsilon_{(\bullet)} > 0$) corresponden a un aumento de longitud de los correspondientes segmentos diferenciales en la configuración de referencia.

Observación 2-18

Las componentes del tensor de deformación situadas fuera de la diagonal principal vienen caracterizadas por los valores $\gamma_{(\bullet,\bullet)}$ (*denominadas deformaciones tangenciales o de cizalladura*) y pueden interpretarse como *los decrementos de los correspondientes ángulos orientados según las direcciones cartesianas en la configuración de referencia*. Valores positivos de las deformaciones tangenciales ($\gamma_{(\bullet,\bullet)} > 0$) indican que los correspondientes ángulos *se cierran* con el proceso de deformación.

Es también muy frecuente en ingeniería aprovechar la simetría del tensor de deformación infinitesimal (ver Observación 2-15) para trabajar únicamente con las seis componentes distintas de dicho tensor reuniéndolas en el denominado *vector de deformaciones ingenieriles* definido cómo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^6 \quad \boldsymbol{\varepsilon} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{deformaciones longitudinales} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{deformaciones tangenciales,} \\ \text{transversales o de cizalladura} \end{matrix} \end{matrix} \tag{2.73}$$

2.11.5 Variación del ángulo entre dos segmentos diferenciales en deformación infinitesimal

Consideremos dos segmentos diferenciales cualesquiera, $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$, en la configuración de referencia y el ángulo Θ que definen (ver Figura 2-16). Sea $\theta = \Theta + \Delta\theta$ el ángulo formado por los correspondientes segmentos deformados

en la configuración actual. Aplicando la ecuación (2.42) a dicho caso se obtiene:

$$\cos\theta = \cos(\Theta + \Delta\theta) = \frac{\mathbf{T}^{(1)} \cdot [\mathbf{1} + 2\boldsymbol{\varepsilon}] \cdot \mathbf{T}^{(2)}}{\sqrt{1 + \underbrace{2\mathbf{T}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{T}^{(1)}}_{<<1}} \sqrt{1 + \underbrace{2\mathbf{T}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{T}^{(2)}}_{<<1}}} \tag{2.74}$$

donde $\mathbf{T}^{(1)}$ y $\mathbf{T}^{(2)}$ son los dos vectores unitarios en las direcciones de $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ cumpliéndose, por lo tanto, que $\mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{T}^{(2)} = \left\|\mathbf{T}^{(1)}\right\| \left\|\mathbf{T}^{(2)}\right\| \cos\Theta = \cos\Theta$. Considerando el carácter de infinitésimo de las componentes de $\boldsymbol{\varepsilon}$ y del propio $\Delta\theta$ se cumple:

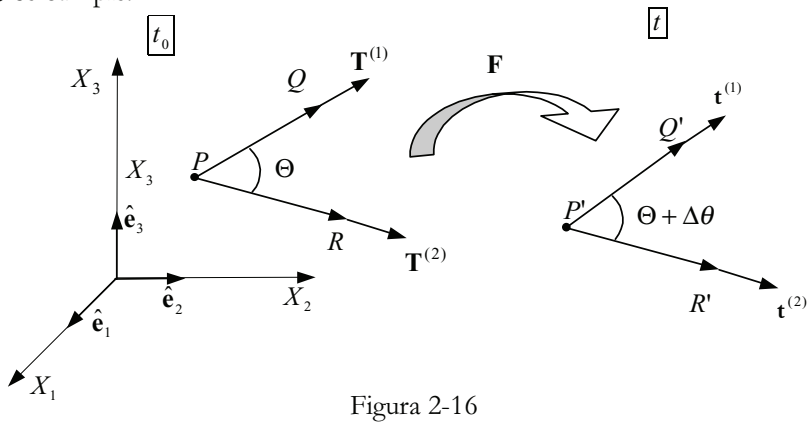


Figura 2-16

NOTA

Se consideran los siguientes desarrollos en serie de Taylor en un entorno de $x = 0$:

$\sin x = x + O(x^2)$

$\cos x = 1 + O(x^2)$

$$\cos\theta = \cos(\Theta + \Delta\theta) = \cos\Theta \cdot \underbrace{\cos\Delta\theta}_{\approx 1} - \operatorname{sin}\Theta \cdot \underbrace{\operatorname{sin}\Delta\theta}_{\approx \Delta\theta} =$$

$$= \cos\Theta - \operatorname{sin}\Theta \cdot \Delta\theta = \frac{\overbrace{\mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{T}^{(2)}}^{=\cos\Theta} + 2\mathbf{T}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{T}^{(2)}}{\underbrace{\sqrt{1 + \mathbf{T}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{T}^{(1)}}}_{\approx 1} \underbrace{\sqrt{1 + \mathbf{T}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{T}^{(2)}}}_{\approx 1}} = \cos\Theta + 2\mathbf{T}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{T}^{(2)} \tag{2.75}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sin}\Theta \cdot \Delta\theta = -2\mathbf{T}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{T}^{(2)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta\theta = -\frac{2\mathbf{T}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{T}^{(2)}}{\operatorname{sin}\Theta} = -\frac{2\mathbf{t}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{t}^{(2)}}{\operatorname{sin}\theta}} \tag{2.76}$$

donde se ha considerado que, debido al carácter infinitesimal de la deformación, se cumple que $\mathbf{T}^{(1)} \approx \mathbf{t}^{(1)}$, $\mathbf{T}^{(2)} \approx \mathbf{t}^{(2)}$ y $\Theta \approx \theta$.

2.11.6 Descomposición polar

Para el caso general de deformación finita la descomposición polar del tensor gradiente de la deformación $\mathbf{F}$ viene dada por la ecuación (2.49). Para el caso de deformación infinitesimal, recordando la expresión (2.12) ($\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{J}$) y el carácter de infinitésimo de las componentes del tensor $\mathbf{J}$ (ver la ecuación (2.61)), el tensor $\mathbf{U}$ de la ecuación (2.49) puede escribirse como:

RECORDATORIO

El desarrollo en serie de Taylor del tensor $\sqrt{1+\mathbf{x}}$ en un entorno de $\mathbf{x}=0$ es:

$$\sqrt{1+\mathbf{x}} = 1+\frac{1}{2}\mathbf{x}+ +O(\mathbf{x}^2)$$

$$\mathbf{U}=\sqrt{\mathbf{F}^T\mathbf{F}}=\sqrt{(\mathbf{1}+\mathbf{J}^T)\cdot(\mathbf{1}+\mathbf{J})}= \\ =\sqrt{\mathbf{1}+\mathbf{J}+\mathbf{J}^T+\underbrace{\mathbf{J}^T\cdot\mathbf{J}}_{<<\mathbf{J}}}\approx\sqrt{\mathbf{1}+\underbrace{\mathbf{J}+\mathbf{J}^T}_{\mathbf{x}}}=\mathbf{1}+\underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{J}+\mathbf{J}^T)}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\Bigg\}\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{U}=\mathbf{1}+\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2.77}$$

y, de forma similar, debido al propio carácter infinitesimal de las componentes de $\boldsymbol{\varepsilon}$ (ver Observación 2-16) resulta:

$$\mathbf{U}^{-1}=(\mathbf{1}+\underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{x}})^{-1}=\mathbf{1}-\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{1}-\underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{J}+\mathbf{J}^T)}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2.78}$$

RECORDATORIO

El desarrollo en serie de Taylor del tensor $(1+\mathbf{x})^{-1}$ en un entorno de $\mathbf{x}=0$ es:

$$(1+\mathbf{x})^{-1}=1-\mathbf{x}+ +O(\mathbf{x}^2)$$

con lo que el tensor de rotación $\mathbf{Q}$ de la ecuación (2.49) puede escribirse como:

$$\mathbf{Q}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{U}^{-1}=(\mathbf{1}+\mathbf{J})\cdot\left[\mathbf{1}-\frac{1}{2}(\mathbf{J}+\mathbf{J}^T)\right]= \\ =\mathbf{1}+\mathbf{J}-\frac{1}{2}(\mathbf{J}+\mathbf{J}^T)-\underbrace{\frac{1}{2}\mathbf{J}\cdot(\mathbf{J}+\mathbf{J}^T)}_{<<\mathbf{J}}=\mathbf{1}+\underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{J}-\mathbf{J}^T)}_{\boldsymbol{\Omega}}\Bigg\}\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{Q}=\mathbf{1}+\boldsymbol{\Omega}} \tag{2.79}$$

La ecuación (2.79) define el *tensor infinitesimal de rotación* $\boldsymbol{\Omega}$:

NOTACIÓN

Se define el operador *gradiente antisimétrico* ∇^a mediante: $\nabla^a(\bullet) = \frac{1}{2}[(\bullet)\otimes\nabla-\nabla\otimes(\bullet)]$

$$\text{Tensor infinitesimal de rotación} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\Omega}\overset{def}{=}\frac{1}{2}(\mathbf{J}-\mathbf{J}^T)=\frac{1}{2}(\mathbf{u}\otimes\nabla-\nabla\otimes\mathbf{u})\overset{def}{=}\nabla^a\mathbf{u} \\ \Omega_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]<<1 \quad i,j\in\{1,2,3\} \end{cases} \tag{2.80}$$

Observación 2-19

El tensor $\boldsymbol{\Omega}$ *es un tensor antisimétrico.* En efecto:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Omega}^T=\frac{1}{2}(\mathbf{J}-\mathbf{J}^T)^T=\frac{1}{2}(\mathbf{J}^T-\mathbf{J})=-\boldsymbol{\Omega} \\ \Omega_{ji}=-\Omega_{ij} \quad i,j\in\{1,2,3\} \end{cases}$$

En consecuencia $\boldsymbol{\Omega}$ tendrá nulos los términos de su diagonal principal, y su matriz de componentes tendrá la estructura:

$$[\boldsymbol{\Omega}]=\begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

En el contexto de pequeñas rotaciones, *el tensor* $\boldsymbol{\Omega}$ *es un tensor que caracteriza la rotación* ($\mathbf{Q}=\mathbf{1}+\boldsymbol{\Omega}$) y de ahí el nombre de tensor infinitesimal de rotación. Al tratarse de un tensor antisimétrico queda definido mediante solamente tres componentes distintas ($\Omega_{23},\Omega_{31},\Omega_{12}$), de las que se puede extraer el denominado *vector infinitesimal de rotación* $\boldsymbol{\theta}$:

NOTACIÓN
Se denota el operador *rotacional de* $(\bullet)$ mediante: $\nabla\times(\bullet)$

$$\text{Vector infinitesimal de rotación} \rightarrow \left\{ \boldsymbol{\theta} \equiv \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\Omega_{23} \\ -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{Bmatrix} \right\} \overset{def}{=} \frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{u} \tag{2.81}$$

Las expresiones (2.12) , (2.65) y (2.79) permiten escribir:

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{J} = \mathbf{1} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T)}_{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{J} - \mathbf{J}^T)}_{\boldsymbol{\Omega}} \Rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{F} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\Omega}} \tag{2.82}$$

Observación 2-20

Los resultados de *aplicar escalarmente el tensor de rotación infinitesimal* $\boldsymbol{\Omega}$ y de *aplicar vectorialmente el vector de rotación infinitesimal* $\boldsymbol{\theta}$ a un vector cualquiera $\mathbf{r} \equiv [r_1, r_2, r_3]^T$ (ver Figura 2-17) coinciden. En efecto:

$$\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega_{12}r_2 - \Omega_{31}r_3 \\ -\Omega_{12}r_1 + \Omega_{23}r_3 \\ \Omega_{31}r_1 - \Omega_{23}r_2 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{r} \overset{not}{=} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ -\Omega_{23} & -\Omega_{31} & -\Omega_{12} \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega_{12}r_2 - \Omega_{31}r_3 \\ -\Omega_{12}r_1 + \Omega_{23}r_3 \\ \Omega_{31}r_1 - \Omega_{23}r_2 \end{Bmatrix}$$

En consecuencia, el vector $\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r} = \boldsymbol{\theta}\times\mathbf{r}$ tiene las siguientes características:

- Es ortogonal al vector $\mathbf{r}$ (puesto que es el resultado de un producto vectorial en el que interviene $\mathbf{r}$).
- Su módulo es infinitesimal (puesto que $\boldsymbol{\theta}$ lo es).
- El vector $\mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{r} + \boldsymbol{\theta}\times\mathbf{r}$ puede considerarse, salvo infinitésimos de orden superior, el resultado de *aplicar una rotación* $\boldsymbol{\theta}$ al vector $\mathbf{r}$.

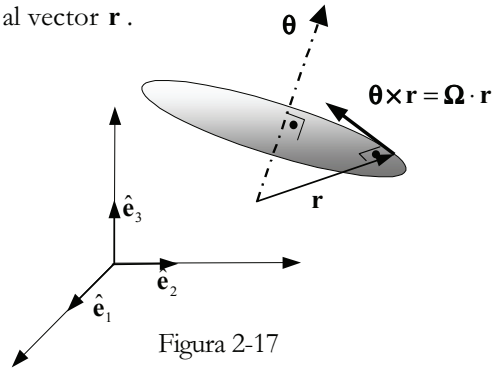


Figura 2-17

Consideremos ahora un segmento diferencial $d\mathbf{X}$ en el entorno diferencial de una partícula P en la configuración de referencia (ver Figura 2-18). De acuerdo con la ecuación (2.82) la deformación transforma dicho vector en el vector $d\mathbf{x}$:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{X} = (\mathbf{1}+\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\Omega})\cdot d\mathbf{X} = \overbrace{\boldsymbol{\varepsilon}\cdot d\mathbf{X}}^{\text{deformación}} + \overbrace{(\mathbf{1}+\boldsymbol{\Omega})\cdot d\mathbf{X}}^{\text{rotación}} \tag{2.83}$$

$$\boxed{\mathbf{F}(\bullet) \equiv \text{deformación}\,(\bullet) + \text{rotación}\,(\bullet)}$$

Observación 2-21

En régimen de deformación infinitesimal la ecuación (2.83) caracteriza el movimiento relativo a una partícula, en un entorno diferencial de la misma, como la suma de:

a) Una *deformación propiamente dicha*, caracterizada por el tensor infinitesimal de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$.

b) Una *rotación* caracterizada por el tensor infinitesimal de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ que (en el contexto de pequeñas rotaciones) mantiene ángulos y distancias.

La *superposición* ($\text{deformación} \circ \text{rotación}$) del caso general de deformación finita (ver Observación 2-12) degenera, para el caso de deformación infinitesimal, en una simple *adición* ($\text{deformación} + \text{rotación}$).

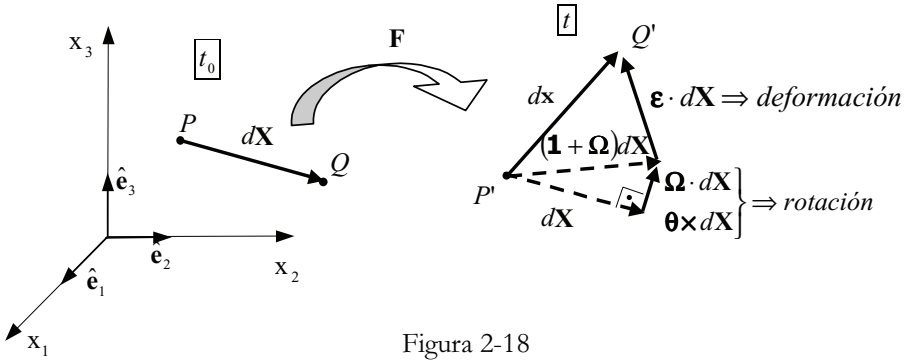


Figura 2-18

2.12 Deformación volumétrica

Definición:

Deformación volumétrica: Incremento producido por la deformación en el volumen asociado a una partícula, por unidad de volumen en la configuración de referencia.

La anterior definición puede expresarse matemáticamente como (ver Figura 2-19):

$$\boxed{\text{def. volumétrica} \rightarrow \quad e(\mathbf{X},t) \overset{\text{def}}{=} \frac{dV(\mathbf{X},t)-dV(\mathbf{X},0)}{dV(\mathbf{X},0)} \overset{\text{not}}{=} \frac{dV_t - dV_0}{dV_0}} \tag{2.84}$$

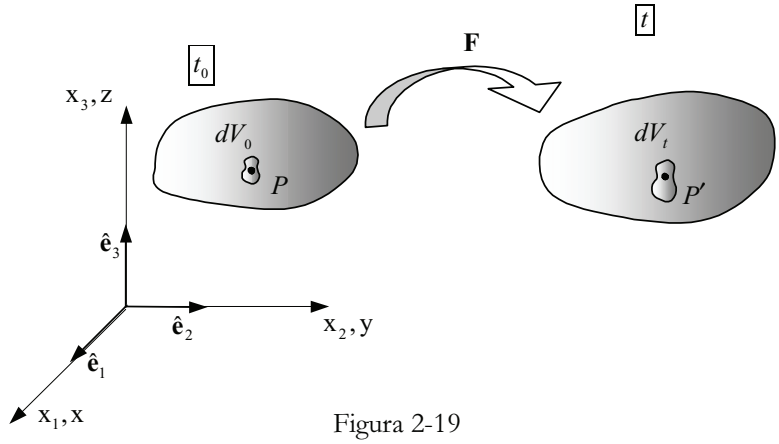


Figura 2-19

La ecuación (2.55) ($dV_t = |\mathbf{F}|_t \, dV_0$) permite expresar, a su vez, la deformación volumétrica en los siguientes términos:

- *Deformación finita:*

$$e = \frac{dV_t - dV_0}{dV_0} = \frac{|\mathbf{F}|_t \, dV_0 - dV_0}{dV_0} \Rightarrow \qquad \boxed{e = |\mathbf{F}| - 1} \tag{2.85}$$

- *Deformación infinitesimal:*

Considerando la ecuación (2.49) ($\mathbf{F} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}$) y recordando que $\mathbf{Q}$ es un tensor ortogonal ($|\mathbf{Q}| = 1$) puede escribirse:

$$|\mathbf{F}| = |\mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}| = |\mathbf{Q}||\mathbf{U}| = |\mathbf{U}| = |\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}| = \det \begin{vmatrix} 1+\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & 1+\varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & 1+\varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \tag{2.86}$$

donde se ha tenido en cuenta la ecuación (2.77) ($\mathbf{U} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}$). Considerando ahora que las componentes de $\boldsymbol{\varepsilon}$ son infinitésimos, y despreciando en la expresión de su determinante los infinitésimos de orden superior a uno, puede escribirse:

$$|\mathbf{F}| = \det \begin{vmatrix} 1+\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & 1+\varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & 1+\varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = 1 + \underbrace{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}}_{Tr(\boldsymbol{\varepsilon})} + O(\varepsilon^2) \approx 1 + Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{2.87}$$

y sustituyendo la ecuación (2.87) en la (2.85) se obtiene, para el caso de deformación infinitesimal:

$$\left.\begin{aligned} dV_t &= \left(1+Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\right)dV_0 \\ e &= \frac{dV_t - dV_0}{dV_0} = |\mathbf{F}| - 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad \boxed{e = Tr(\boldsymbol{\varepsilon})} \tag{2.88}$$

2.13 Velocidad de deformación

En las secciones anteriores de este capítulo se ha estudiado el concepto *deformación*, entendido como la variación de la posición relativa (ángulos y distancias) de las partículas en el entorno de una dada. En los siguientes apartados, consideraremos la velocidad a la que se modifica esta posición relativa introduciendo el concepto de *velocidad de deformación* como una medida de la variación de la posición relativa entre partículas por unidad de tiempo

2.13.1 Tensor gradiente de la velocidad

Considerando la configuración correspondiente en el instante t, sean dos partículas del medio continuo P y Q que ocupan los puntos espaciales P' y Q' en dicho instante (ver Figura 2-20), sus velocidades, $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ y $\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}(\mathbf{x}+d\mathbf{x},t)$ y su velocidad relativa:

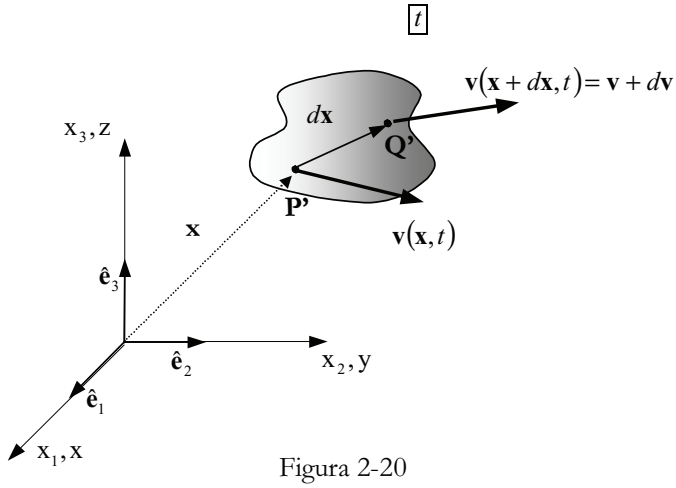


Figura 2-20

$$d\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}_Q - \mathbf{v}_P = \mathbf{v}(\mathbf{x}+d\mathbf{x},t) - \mathbf{v}(\mathbf{x},t) \tag{2.89}$$

con lo que puede escribirse:

$$\begin{aligned} d\mathbf{v} &= \underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}}_{\boldsymbol{l}} \cdot d\mathbf{x} = \boldsymbol{l} \cdot d\mathbf{x} \\ d\mathrm{v}_i &= \underbrace{\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_j}}_{l_{ij}} dx_j = l_{ij}\, dx_j \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{aligned} \tag{2.90}$$

En la ecuación (2.90) se ha introducido el denominado tensor *gradiente espacial de la velocidad* $\boldsymbol{l}(\mathbf{x},t)$ definido como:

$$\text{Tensor gradiente espacial de la velocidad} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{l}(\mathbf{x},t) \overset{def}{=} \dfrac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{x}} \\ \boldsymbol{l} = \mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\nabla} \\ l_{ij} = \dfrac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_j} \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{2.91}$$

2.13.2 Tensor velocidad de deformación y tensor spin

RECORDATORIO

Todo tensor de segundo orden, $\mathbf{a}$, se puede descomponer en la suma de su parte simétrica ($sym(\mathbf{a})$) y antisimétrica $skew(\mathbf{a})$) de la forma:

$$\mathbf{a} = sym(\mathbf{a}) + skew(\mathbf{a})$$

$$sym(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}^T}{2}$$

$$skew(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{a}^T}{2}$$

Descomponiendo el tensor gradiente de la velocidad en su parte simétrica y antisimétrica:

$$\boldsymbol{l} = \mathbf{d} + \mathbf{w} \tag{2.92}$$

donde $\mathbf{d}$ es un tensor simétrico denominado *tensor velocidad de deformación*:

$$\text{Tensor velocidad de deformación} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{d} \overset{def}{=} sym(\boldsymbol{l}) = \dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^T\right) = \dfrac{1}{2}\left(\mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\nabla} + \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}\right) \overset{not}{=} \boldsymbol{\nabla}^s \mathbf{v} \\ \mathrm{d}_{ij} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_i}\right] \quad i,j \in \{1,2,3\} \\ [\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} \mathrm{d}_{11} & \mathrm{d}_{12} & \mathrm{d}_{31} \\ \mathrm{d}_{12} & \mathrm{d}_{22} & \mathrm{d}_{23} \\ \mathrm{d}_{31} & \mathrm{d}_{23} & \mathrm{d}_{33} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{2.93}$$

y $\mathbf{w}$ es un tensor asimétrico denominado *tensor velocidad de rotación o tensor spin* cuya expresión es:

$$\text{Tensor velocidad de rotación (spin)} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{w} \overset{def}{=} skew(\boldsymbol{l}) = \dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l}^T\right) = \dfrac{1}{2}\left(\mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\nabla} - \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}\right) \overset{not}{=} \boldsymbol{\nabla}^a \mathbf{v} \\ \mathrm{w}_{ij} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_i}\right] \quad i,j \in \{1,2,3\} \\ [\mathbf{w}] = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{w}_{12} & -\mathrm{w}_{31} \\ -\mathrm{w}_{12} & 0 & \mathrm{w}_{23} \\ \mathrm{w}_{31} & -\mathrm{w}_{23} & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{2.94}$$

2.13.3 Interpretación física del tensor velocidad de deformación

Consideremos el segmento diferencial definido por las partículas P y Q de la Figura 2-21 y la variación del cuadrado de su longitud a lo largo del tiempo:

$$\frac{d}{dt}ds^2 = \frac{d}{dt}(d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}(d\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x} + d\mathbf{x}\cdot\frac{d}{dt}(d\mathbf{x}) =$$
$$= d\underbrace{\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)}_{\mathbf{v}}\cdot d\mathbf{x} + d\mathbf{x}\cdot d\underbrace{\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)}_{\mathbf{v}} = d\mathbf{v}\cdot d\mathbf{x} + d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{v} \tag{2.95}$$

y utilizando las relaciones (2.90) ($d\mathbf{v} = \boldsymbol{l}\cdot d\mathbf{x}$) y (2.93) ($\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^T)$) se obtiene de la ecuación (2.95):

$$\frac{d}{dt}ds^2 = (d\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{l}^T)\cdot d\mathbf{x} + d\mathbf{x}\cdot(\boldsymbol{l}\cdot d\mathbf{x}) = d\mathbf{x}\left[\underbrace{\boldsymbol{l}^T + \boldsymbol{l}}_{2\mathbf{d}}\right]\cdot d\mathbf{x} = 2d\mathbf{x}\cdot\mathbf{d}\cdot d\mathbf{x} \tag{2.96}$$

Considerando ahora la ecuación (2.20) ($ds^2 - dS^2 = 2\,d\mathbf{X}\cdot\mathbf{E}\cdot d\mathbf{X}$) derivándola respecto al tiempo y teniendo en cuenta la ecuación (2.96):

$$2d\mathbf{x}\cdot\mathbf{d}\cdot d\mathbf{x} = \frac{d}{dt}ds^2(t) = \frac{d}{dt}\left(ds^2(t) - dS^2\right) =$$
$$\frac{d}{dt}\left(2d\mathbf{X}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{X},t)\cdot d\mathbf{X}\right) = 2d\mathbf{X}\cdot\underbrace{\frac{d\mathbf{E}}{dt}}_{\dot{\mathbf{E}}}\cdot d\mathbf{X} = 2d\mathbf{X}\cdot\dot{\mathbf{E}}\cdot d\mathbf{X} \tag{2.97}$$

Sustituyendo ahora la ecuación (2.2) ($d\mathbf{x} = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{X}$) en la (2.97) se obtiene:

$$d\mathbf{X}\cdot\dot{\mathbf{E}}\cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{x}\cdot\mathbf{d}\cdot d\mathbf{x} = [d\mathbf{x}]^T[\mathbf{d}]\cdot[d\mathbf{x}] = d\mathbf{X}\cdot\left[\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{F}\right]\cdot d\mathbf{X}$$
$$\Rightarrow d\mathbf{X}\cdot\left[\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{F} - \dot{\mathbf{E}}\right]\cdot d\mathbf{X} = 0 \quad \forall d\mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad \left[\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{F} - \dot{\mathbf{E}}\right] = \mathbf{0} \Rightarrow \tag{2.98}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{F}}$$

NOTA

Se utiliza aquí el siguiente teorema del álgebra tensorial: dado un tensor de segundo orden $\mathbf{A}$, si se verifica que $\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = 0$ para todo vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{A} \equiv 0$.

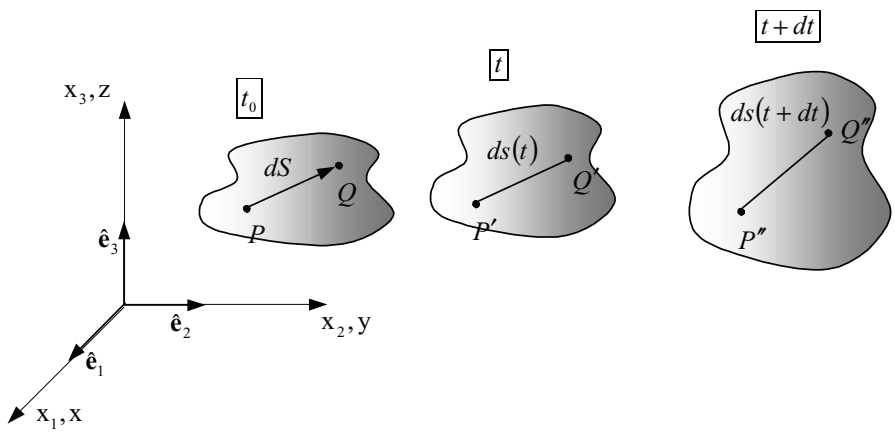


Figura 2-21

Observación 2-22

La ecuación (2.98) pone de manifiesto la relación existente entre el tensor velocidad de deformación $\mathbf{d}(\mathbf{x},t)$ y la derivada material del tensor material de deformación $\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X},t)$, proporcionando una interpretación física (y justificando su denominación) para el tensor $\mathbf{d}(\mathbf{x},t)$. De la mencionada ecuación se desprende, sin embargo, que los tensores $\mathbf{d}(\mathbf{x},t)$ y $\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X},t)$ no son exactamente el mismo. Ambos tensores coincidirán exactamente en los siguientes casos:

- En la configuración de referencia ($t = t_0 \Rightarrow \mathbf{F}|_{t=t_0} = \mathbf{1}$)
- En la teoría de deformación infinitesimal ($\mathbf{x} \approx \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{F} = \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \approx \mathbf{1}$)

2.13.4 Interpretación física del tensor velocidad de rotación w

Partiendo de la ecuación (2.94) y al ser $\mathbf{w}$ un tensor antisimétrico (definido por lo tanto mediante sólo tres componentes distintas), puede extraerse del mismo el vector:

NOTA

Obsérvese la similitud en la estructura de los tensores $\boldsymbol{\Omega}$ y $\boldsymbol{\theta}$ de la sección 2.11.6 y los tensores $\mathbf{w}$ y $\boldsymbol{\omega}$.

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} rot(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} \equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ -\left(\dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \\ -\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_{23} \\ -w_{31} \\ -w_{12} \end{bmatrix} \tag{2.99}$$

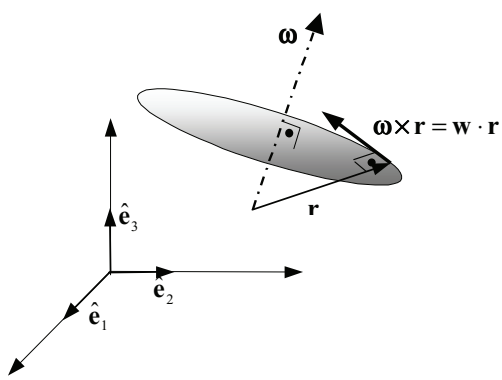


Figura 2-22

Al vector $2\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}$ se le denomina *vector vorticidad*. Es posible demostrar (la demostración es totalmente análoga a la de la Observación 2-20) que se cumple la siguiente igualdad:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{r} \qquad \forall \mathbf{r} \tag{2.100}$$

y que, por lo tanto, es posible caracterizar a $\boldsymbol{\omega}$ como la velocidad angular de un movimiento de rotación, y a $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{r}$ como la correspondiente velocidad de

rotación del punto cuyo vector de posición respecto al centro de rotación es $\mathbf{r}$ (ver Figura 2-22). A partir de ahí, y considerando, las ecuaciones (2.90) ($d\mathbf{v} = \boldsymbol{l} \cdot d\mathbf{x}$) y (2.92) ($\boldsymbol{l} = \mathbf{d} + \mathbf{w}$) puede escribirse:

$$d\mathbf{v} = \boldsymbol{l} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{d} + \mathbf{w}) \cdot d\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{d} \cdot d\mathbf{x}}_{\substack{\text{velocidad de} \\ \text{estiramiento}}} + \underbrace{\mathbf{w} \cdot d\mathbf{x}}_{\substack{\text{velocidad de} \\ \text{rotación}}} \tag{2.101}$$

lo que permite describir la velocidad relativa $d\mathbf{v}$ de las partículas en el entorno de una dada P (ver Figura 2-23) como la *suma* de una *velocidad relativa de estiramiento* (caracterizada por el tensor velocidad de deformación $\mathbf{d}$) y una *velocidad relativa de rotación* (caracterizada por el tensor spin $\mathbf{w}$ o el vector vorticidad $2\boldsymbol{\omega}$).

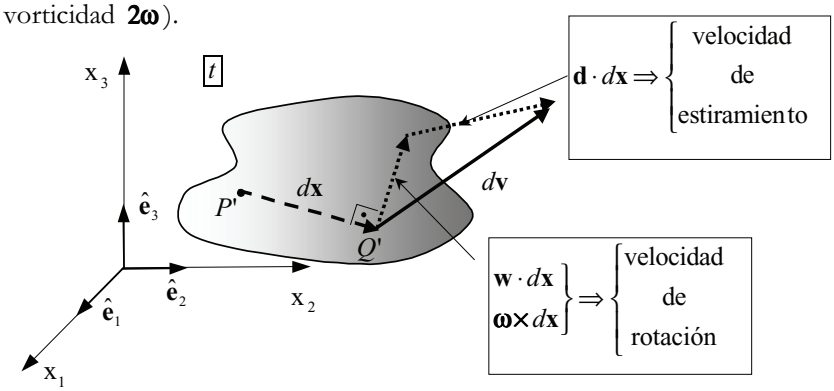


Figura 2-23

2.14 Derivadas materiales de los tensores de deformación y otras magnitudes

2.14.1 Tensor gradiente de la deformación F y gradiente de la deformación inverso F^{-1}

Derivando respecto al tiempo la expresión de $\mathbf{F}$ en la ecuación (2.3)

NOTA

Se utiliza aquí el teorema de igualdad de derivadas cruzadas para funciones regulares:

$$\frac{\partial^2(\bullet)}{\partial \mu_i \, \mu_j} = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial \mu_j \, \mu_i}$$

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i(\mathbf{X},t)}{\partial X_j} \Rightarrow \frac{dF_{ij}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x_i(\mathbf{X},t)}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j}\underbrace{\frac{\partial x_i(\mathbf{X},t)}{\partial t}}_{\mathrm{v_i}} = \frac{\partial \mathrm{v}_i(\mathbf{X},t)}{\partial X_j} =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial \mathrm{v}_i(\mathbf{x}(\mathbf{X},t))}{\partial x_k}}_{l_{ik}} \underbrace{\frac{\partial \mathrm{x}_k}{\partial X_j}}_{F_{kj}} = \boldsymbol{l}_{ik} F_{kj} \quad \Rightarrow \tag{2.102}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dF_{ij}}{dt} = \dot{F}_{ij} = \boldsymbol{l}_{ik} F_{kj} \qquad i, j \in \{1,2,3\} \\ \dfrac{d\mathbf{F}}{dt} \overset{not}{=} \dot{\mathbf{F}} = \boldsymbol{l} \cdot \mathbf{F} \end{cases}$$

donde se ha tenido en cuenta la expresión (2.91) para el tensor gradiente de la velocidad $\boldsymbol{l}$. Para obtener la derivada material del tensor $\mathbf{F}^{-1}$ se deriva la siguiente identidad:

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{-1}=\mathbf{1}\quad\Rightarrow\quad\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{-1})=\frac{d\mathbf{F}}{dt}\cdot\mathbf{F}^{-1}+\mathbf{F}\cdot\frac{d\left(\mathbf{F}^{-1}\right)}{dt}=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow\frac{d\left(\mathbf{F}^{-1}\right)}{dt}=-\mathbf{F}^{-1}\cdot\underbrace{\dot{\mathbf{F}}}_{\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}^{-1}=-\mathbf{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{l}\cdot\underbrace{\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{-1}}_{\mathbf{1}}=-\mathbf{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{l}\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{d\left(\mathbf{F}^{-1}\right)}{dt}=-\mathbf{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{l}\\[2ex]\dfrac{dF_{ij}^{-1}}{dt}=-F_{ik}^{-1}l_{kj}\quad i,j\in\{1,2,3\}\end{cases}}\tag{2.103}$$

NOTA

No debe confundirse la derivada material del tensor inverso $\dfrac{d\left(\mathbf{F}^{-1}\right)}{dt}$ con el inverso de la derivada material del tensor: $\left(\dot{\mathbf{F}}\right)^{-1}$. Ambos tensores son distintos.

2.14.2 Tensores de deformación E y e

De las ecuaciones (2.21), (2.102) y (2.93):

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^{T}\cdot\mathbf{F}-\mathbf{1}\right)\Rightarrow\frac{d\mathbf{E}}{dt}=\dot{\mathbf{E}}=\frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{F}}^{T}\cdot\mathbf{F}+\mathbf{F}^{T}\cdot\dot{\mathbf{F}}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^{T}\cdot\boldsymbol{l}^{T}\cdot\mathbf{F}+\mathbf{F}^{T}\cdot\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{F}\right)=\frac{1}{2}\mathbf{F}^{T}\cdot\underbrace{\left(\boldsymbol{l}+\boldsymbol{l}^{T}\right)}_{2\mathbf{d}}\cdot\mathbf{F}=\mathbf{F}^{T}\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{F}\tag{2.104}$$

$$\Rightarrow\quad\dot{\mathbf{E}}=\mathbf{F}^{T}\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{F}$$

NOTA

Obsérvese que el resultado es el mismo que el obtenido en la ecuación (2.98) por un procedimiento alternativo.

Para el tensor espacial de deformación $\mathbf{e}$, de las ecuaciones (2.23) y (2.103) se obtiene:

$$\mathbf{e}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{1}-\mathbf{F}^{-T}\cdot\mathbf{F}^{-1}\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{d\mathbf{e}}{dt}=\dot{\mathbf{e}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\left(\mathbf{F}^{-T}\right)\cdot\mathbf{F}^{-1}+\mathbf{F}^{-T}\frac{d}{dt}\left(\mathbf{F}^{-1}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}^{T}\cdot\mathbf{F}^{-T}\cdot\mathbf{F}^{-1}+\mathbf{F}^{-T}\cdot\mathbf{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{l}\right)\tag{2.105}$$

$$\Rightarrow\quad\dot{\mathbf{e}}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}^{T}\cdot\mathbf{F}^{-T}\cdot\mathbf{F}^{-1}+\mathbf{F}^{-T}\cdot\mathbf{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{l}\right)$$

2.14.3 Derivadas materiales de diferenciales de volumen y de área

El diferencial de volumen $dV(\mathbf{X},t)$ asociado a una determinada partícula, P, varía a lo largo del tiempo (ver Figura 2-24) y, en consecuencia, tiene sentido calcular su derivada material. Derivando la expresión (2.55) para el diferencial de volumen:

$$dV(\mathbf{X},t)=\left|\mathbf{F}(\mathbf{X},t)\right|dV_{0}(\mathbf{X})\Rightarrow\qquad\frac{d}{dt}dV(t)=\frac{d\left|\mathbf{F}\right|}{dt}dV_{0}\tag{2.106}$$

con lo que la derivada material del determinante del tensor gradiente de la deformación $|\mathbf{F}|$ resulta:

NOTA

La derivada del determinante de un tensor $\mathbf{A}$, respecto al propio tensor, puede escribirse como:

$$\frac{d|\mathbf{A}|}{d\mathbf{A}} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{A}^{-T}$$

$$\frac{d|\mathbf{A}|}{dA_{ij}} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{A}^{-1}_{ji}$$

$$\frac{d|\mathbf{F}|}{dt} = \frac{d|\mathbf{F}|}{dF_{ij}}\frac{dF_{ij}}{dt} = |\mathbf{F}|\,F_{ji}^{-1}\underbrace{\frac{dF_{ij}}{dt}}_{l_{ik}F_{kj}} = |\mathbf{F}|F_{ji}^{-1}\boldsymbol{l}_{ik}F_{kj} = |\mathbf{F}|\underbrace{F_{kj}F_{ji}^{-1}}_{\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{-1}\right)_{ki}=\delta_{ki}}\boldsymbol{l}_{ik} = |\mathbf{F}|\delta_{ki}\boldsymbol{l}_{ik}$$

$$= |\mathbf{F}|l_{ii} = |\mathbf{F}|\frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial \mathrm{x_i}} = |\mathbf{F}|\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} \quad \Rightarrow \tag{2.107}$$

$$\boxed{\frac{d|\mathbf{F}|}{dt} = |\mathbf{F}|\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}}$$

donde se han tenido en cuenta las expresiones (2.102) y (2.91). Substituyendo ahora la ecuación (2.107) en la (2.106) se obtiene finalmente, tras considerar la ecuación (2.55):

$$\frac{d}{dt}(dV) = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})\underbrace{|\mathbf{F}|dV_0}_{dV} = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})dV \tag{2.108}$$

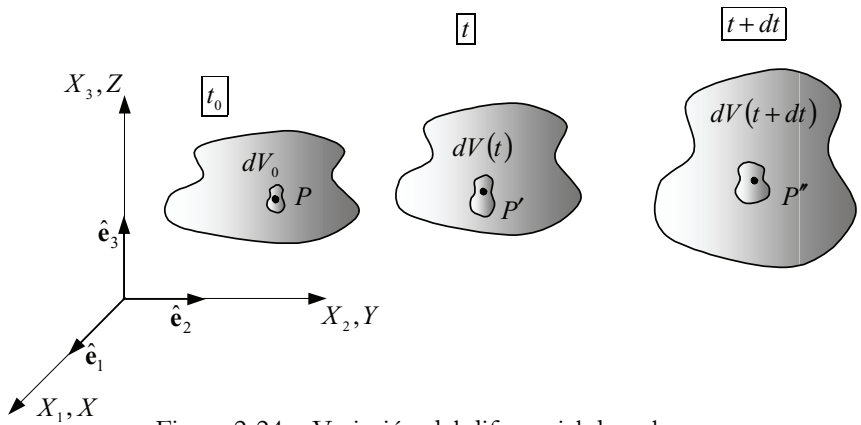


Figura 2-24 – Variación del diferencial de volumen

Puede operarse similarmente para obtener la derivada material del diferencial de área asociado a una partícula determinada P y a una dirección $\mathbf{n}$ (ver Figura 2-25). El vector diferencial de área asociado a la partícula en la configuración de referencia, $d\mathbf{A}(\mathbf{X}) = dA\,\mathbf{N}$, y en la configuración actual, $d\mathbf{a}(\mathbf{x},t) = da\,\mathbf{n}$, están relacionados por $d\mathbf{a} = |\mathbf{F}|\cdot d\mathbf{A}\cdot\mathbf{F}^{-1}$ (ver ecuación (2.59)) y derivando dicha expresión:

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{a}) = \frac{d}{dt}\left(|\mathbf{F}|\cdot d\mathbf{A}\cdot\mathbf{F}^{-1}\right) = \underbrace{\frac{d|\mathbf{F}|}{dt}}_{|\mathbf{F}|\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}} d\mathbf{A}\cdot\mathbf{F}^{-1} + |\mathbf{F}|\cdot d\mathbf{A}\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\mathbf{F}^{-1}\right)}_{-\mathbf{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{l}} =$$

$$= (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})\underbrace{|\mathbf{F}|\,d\mathbf{A}\cdot\mathbf{F}^{-1}}_{d\mathbf{a}} - \underbrace{|\mathbf{F}|\,d\mathbf{A}\cdot\mathbf{F}^{-1}}_{d\mathbf{a}}\cdot\boldsymbol{l} \Rightarrow \tag{2.109}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(d\mathbf{a}) = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})d\mathbf{a} - d\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{l} = d\mathbf{a}\cdot\left((\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})\mathbf{1} - \boldsymbol{l}\right)}$$

donde se han considerado las ecuaciones (2.103) y (2.107).

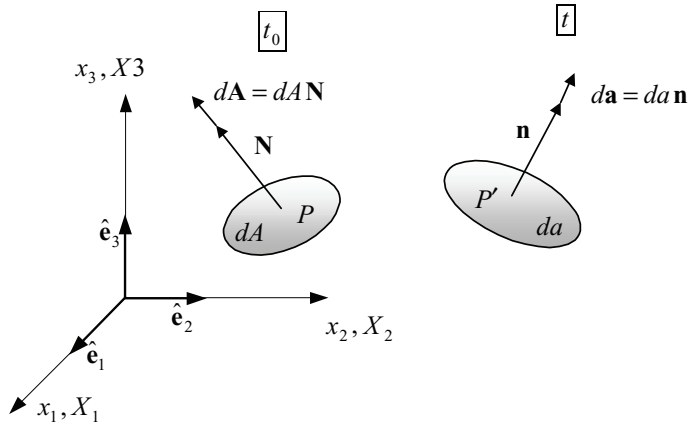


Figura 2-25 – Variación del diferencial de área

2.15 Movimientos y deformaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Las expresiones y ecuaciones obtenidas en notación intrínseca o compacta son independientes del sistema de coordenadas considerado. Sin embargo, las expresiones en componentes dependen del sistema de coordenadas en el que se trabaje. Además del *sistema de coordenadas cartesiano*, en el que se ha trabajado en los apartados anteriores, consideraremos ahora dos sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales: *coordenadas cilíndricas* y *coordenadas esféricas*.

Observación 2-23

Un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales, (denominadas genéricamente $\{a,b,c\}$ viene caracterizado por su base física $\{\hat{\mathbf{e}}_a,\hat{\mathbf{e}}_b,\hat{\mathbf{e}}_c\}$ unitaria ($\|\hat{\mathbf{e}}_a\|=\|\hat{\mathbf{e}}_b\|=\|\hat{\mathbf{e}}_c\|=1$) cuyas componentes son ortogonales entre sí ($\hat{\mathbf{e}}_a\cdot\hat{\mathbf{e}}_b=\hat{\mathbf{e}}_a\cdot\hat{\mathbf{e}}_c=\hat{\mathbf{e}}_b\cdot\hat{\mathbf{e}}_c=0$), tal como ocurre con un sistema cartesiano. La diferencia fundamental es que la orientación de la base curvilínea va cambiando en cada punto del espacio ($\hat{\mathbf{e}}_m\equiv\hat{\mathbf{e}}_m(\mathbf{x})\quad m\in\{a,b,c\}$). Así pues, a los efectos que nos interesan aquí, podemos considerar un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales como un *sistema de coordenadas cartesiano móvil* $\{x',y',z'\}$ asociado a la base curvilínea $\{\hat{\mathbf{e}}_a,\hat{\mathbf{e}}_b,\hat{\mathbf{e}}_c\}$ (ver Figura 2-26).

Observación 2-24

Las componentes, de una cierta magnitud de carácter vectorial ($\mathbf{v}$) o tensorial ($\mathbf{T}$) en el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales $\{a,b,c\}$ podrán obtenerse *como sus respectivas componentes en el sistema cartesiano local* $\{x',y',z'\}$:

$$\mathbf{v}\equiv\begin{Bmatrix}v_a\\v_b\\v_c\end{Bmatrix}\equiv\begin{Bmatrix}v_{x'}\\v_{y'}\\v_{z'}\end{Bmatrix}\qquad \mathbf{T}\equiv\begin{bmatrix}T_{aa}&T_{ab}&T_{ac}\\T_{ba}&T_{bb}&T_{bc}\\T_{ca}&T_{cb}&T_{cc}\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}T_{x'x'}&T_{x'y'}&T_{x'z'}\\T_{y'x'}&T_{y'y'}&T_{y'z'}\\T_{z'x'}&T_{z'y'}&T_{z'z'}\end{bmatrix}$$

Observación 2-25

Las componentes curvilíneas de los operadores diferenciales (el operador ∇ y sus derivados) *no son iguales* a sus componentes en el sistema coordenado local $\{x', y', z'\}$ y *deben ser obtenidas específicamente para cada caso*. Su valor para coordenadas cilíndricas y esféricas se proporciona en el apartado correspondiente.

2.15.1 Coordenadas cilíndricas

La posición de un cierto punto en el espacio puede definirse mediante sus coordenadas cilíndricas $\{r, \theta, z\}$ (ver Figura 2-26). En dicha figura se presenta también la base física ortonormal $\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_z$. Esta base cambia en cada punto del espacio de acuerdo con:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} = \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{e}}_r \tag{2.110}$$

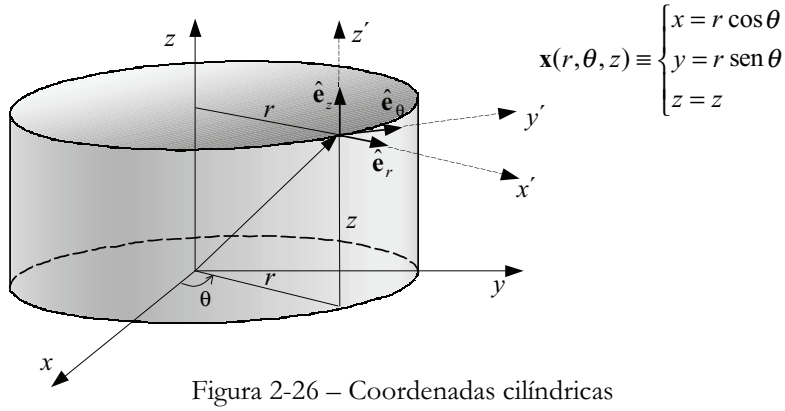


Figura 2-26 – Coordenadas cilíndricas

En la Figura 2-27 se presenta el correspondiente elemento diferencial.

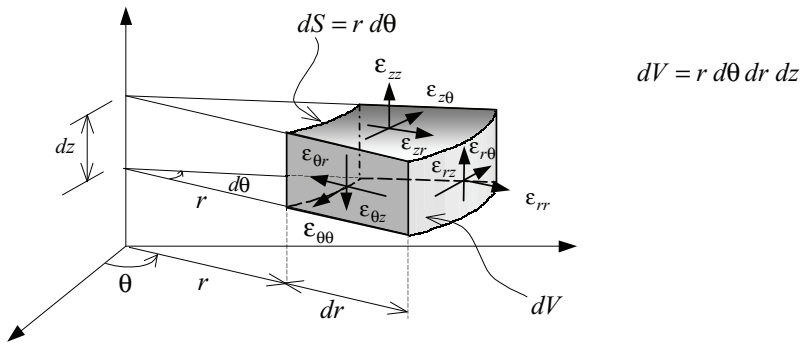


Figura 2-27 – Elemento diferencial en coordenadas cilíndricas

Las expresiones en coordenadas cilíndricas de algunos de los elementos tratados en este capítulo son:

- **Operador nabla**:

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_z \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.111}$$

- **Vector de desplazamientos u y vector velocidad v**:

$$\mathbf{u} = \mathrm{u}_r\hat{\mathbf{e}}_r + \mathrm{u}_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + \mathrm{u}_z\hat{\mathbf{e}}_z \Rightarrow \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathrm{u}_r \\ \mathrm{u}_\theta \\ \mathrm{u}_z \end{bmatrix} \tag{2.112}$$

$$\mathbf{v} = \mathrm{v}_r\hat{\mathbf{e}}_r + \mathrm{v}_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + \mathrm{v}_z\hat{\mathbf{e}}_z \Rightarrow \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathrm{v}_r \\ \mathrm{v}_\theta \\ \mathrm{v}_z \end{bmatrix} \tag{2.113}$$

- **Tensor infinitesimal de deformación ε**:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left\{[\mathbf{u}\otimes\boldsymbol{\nabla}] + [\mathbf{u}\otimes\boldsymbol{\nabla}]^T\right\} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'x'} & \varepsilon_{x'y'} & \varepsilon_{x'z'} \\ \varepsilon_{x'y'} & \varepsilon_{y'y'} & \varepsilon_{y'z'} \\ \varepsilon_{x'z'} & \varepsilon_{y'z'} & \varepsilon_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{rz} & \varepsilon_{\theta z} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial \mathrm{u}_r}{\partial r} \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\mathrm{u}_r}{r} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \mathrm{u}_z}{\partial z} \tag{2.114}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{u}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathrm{u}_\theta}{\partial r} - \frac{\mathrm{u}_\theta}{r}\right] \qquad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{u}_r}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{u}_z}{\partial r}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{u}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{u}_z}{\partial \theta}\right)$$

En la Figura 2-27 se presentan las componentes de **ε** sobre el correspondiente elemento diferencial.

- **Tensor velocidad de deformación d**:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}\left\{[\mathbf{v}\otimes\boldsymbol{\nabla}] + [\mathbf{v}\otimes\boldsymbol{\nabla}]^T\right\} \equiv \begin{bmatrix} d_{x'x'} & d_{x'y'} & d_{x'z'} \\ d_{x'y'} & d_{y'y'} & d_{y'z'} \\ d_{x'z'} & d_{y'z'} & d_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{rr} & d_{r\theta} & d_{rz} \\ d_{r\theta} & d_{\theta\theta} & d_{\theta z} \\ d_{rz} & d_{\theta z} & d_{zz} \end{bmatrix}$$

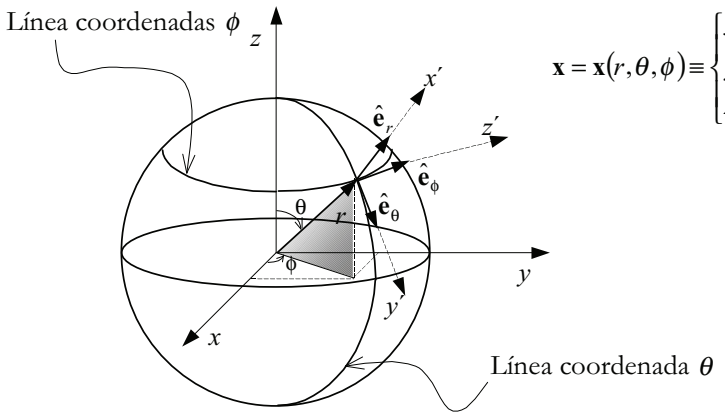
$$d_{rr} = \frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial r} \qquad d_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\mathrm{v}_r}{r} \qquad d_{zz} = \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z} \tag{2.115}$$

$$d_{r\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathrm{v}_\theta}{\partial r} - \frac{\mathrm{v}_\theta}{r}\right] \qquad d_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial r}\right)$$

$$d_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial \theta}\right)$$

2.15.2 Coordenadas esféricas

Un punto del espacio está definido por sus coordenadas esféricas $\{r, \theta, \phi\}$.



$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \theta, \phi) \equiv \begin{cases} x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \\ y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

Figura 2-28– Coordenadas esféricas

En la Figura 2-28 se presenta la base física ortonormal $\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\phi$. Esta base cambia en cada punto del espacio de acuerdo con:.

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} = \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{e}}_r \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \theta} = \mathbf{0} \tag{2.116}$$

- **Operador nabla**:

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \phi} \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial}{\partial \phi} \end{bmatrix} \tag{2.117}$$

- **Vector de desplazamientos u y vector velocidad v**:

$$\mathbf{u} = \mathrm{u}_r \hat{\mathbf{e}}_r + \mathrm{u}_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + \mathrm{u}_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \Rightarrow \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathrm{u}_r \\ \mathrm{u}_\theta \\ \mathrm{u}_\phi \end{bmatrix} \tag{2.118}$$

$$\mathbf{v} = \mathrm{v}_r \hat{\mathbf{e}}_r + \mathrm{v}_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + \mathrm{v}_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \Rightarrow \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathrm{v}_r \\ \mathrm{v}_\theta \\ \mathrm{v}_\phi \end{bmatrix} \tag{2.119}$$

- **Tensor infinitesimal de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$:**

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left\{[\mathbf{u}\otimes\boldsymbol{\nabla}] + [\mathbf{u}\otimes\boldsymbol{\nabla}]^T\right\} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'x'} & \varepsilon_{x'y'} & \varepsilon_{x'z'} \\ \varepsilon_{x'y'} & \varepsilon_{y'y'} & \varepsilon_{y'z'} \\ \varepsilon_{x'z'} & \varepsilon_{y'z'} & \varepsilon_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{r\phi} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta\phi} \\ \varepsilon_{r\phi} & \varepsilon_{\theta\phi} & \varepsilon_{\phi\phi} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r\ \mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta}{r}\cot\phi + \frac{u_r}{r} \tag{2.120}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right] \qquad \varepsilon_{r\phi} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r}\right]$$

$$\varepsilon_{\theta\phi} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{u_\phi}{r}\cot\phi\right]$$

En la Figura 2-29 se presentan las componentes de $\boldsymbol{\varepsilon}$ sobre el correspondiente elemento diferencial.

- **Tensor velocidad de deformación $\mathbf{d}$:**

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}\left\{[\mathbf{v}\otimes\boldsymbol{\nabla}] + [\mathbf{v}\otimes\boldsymbol{\nabla}]^T\right\} \equiv \begin{bmatrix} d_{x'x'} & d_{x'y'} & d_{x'z'} \\ d_{x'y'} & d_{y'y'} & d_{y'z'} \\ d_{x'z'} & d_{y'z'} & d_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{rr} & d_{r\theta} & d_{r\phi} \\ d_{r\theta} & d_{\theta\theta} & d_{\theta\phi} \\ d_{r\phi} & d_{\theta\phi} & d_{\phi\phi} \end{bmatrix}$$

$$d_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \qquad d_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}$$

$$d_{\phi\phi} = \frac{1}{r\ \mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\theta}{r}\cot\phi + \frac{v_r}{r} \tag{2.121}$$

$$d_{r\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right] \qquad d_{r\phi} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r}\right]$$

$$d_{\theta\phi} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{v_\phi}{r}\cot\phi\right]$$

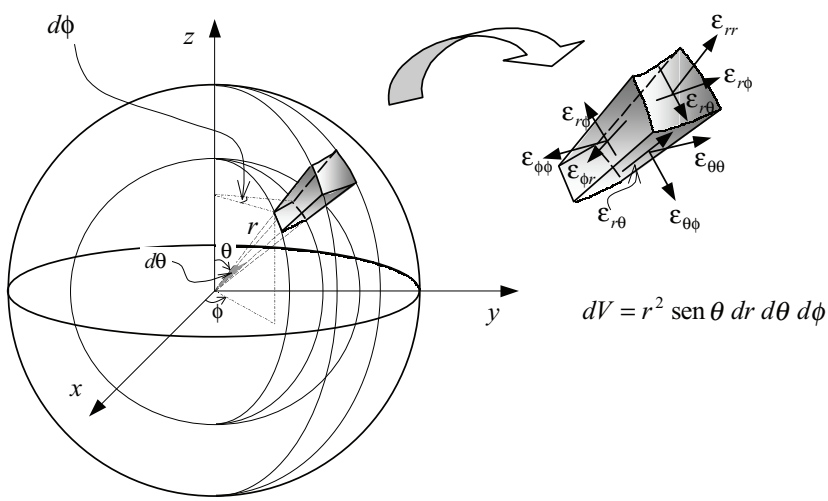


Figura 2-29 – Elemento diferencial en coordenadas esféricas

3 Ecuaciones de compatibilidad

3.1 Introducción

Dado un campo de desplazamientos $\mathbf{U}(\mathbf{X},t)$ suficientemente regular, siempre es posible hallar el campo de deformaciones correspondiente (por ejemplo, el de Green-Lagrange) mediante derivación del mismo respecto a las coordenadas (en este caso materiales):

NOTACIÓN

Se utiliza aquí la notación simplificada: $\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \overset{not}{=} U_{i,j}$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i}\frac{\partial U_k}{\partial X_j}\right) \overset{not}{=} \frac{1}{2}\left(U_{i,j} + U_{j,i} + U_{k,i}U_{k,j}\right) \quad i,j \in \{1,2,3\} \tag{3.1}$$

Para el caso de deformaciones infinitesimales, dado el campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, el campo de deformaciones se obtiene como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \overset{not}{=} \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \quad i,j \in \{1,2,3\} \tag{3.2}$$

Se puede plantear la pregunta en forma inversa, es decir: dado un campo de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$, ¿es posible hallar un campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ tal que $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ sea su tensor infinitesimal de deformación? Esto no siempre es posible y la respuesta la proporciona las denominadas *ecuaciones de compatibilidad*. La expresión (3.2) constituye un sistema de 6 (debido a la simetría) ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (E.D.P's.) con 3 incógnitas $u_1(\mathbf{x},t), u_2(\mathbf{x},t), u_3(\mathbf{x},t)$. Este sistema está sobredeterminado, ya que existen más condiciones que incógnitas y puede no tener solución.

Por lo tanto, para que un tensor simétrico de segundo orden $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ corresponda a un tensor de deformaciones (y que por lo tanto sea integrable y exista un campo de desplazamientos del cual provenga) es necesario que verifique unas ciertas condiciones. Estas condiciones se denominan condiciones o ecuaciones de compatibilidad y garantizan la *continuidad* del medio continuo durante el proceso de deformación (ver Figura 3-1).

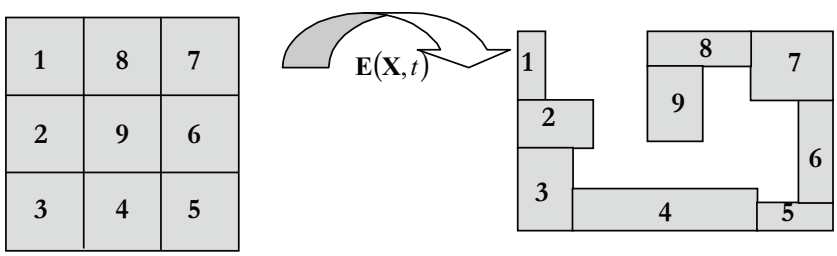


Figura 3-1– Campo de deformaciones no compatible

Definición:

Condiciones de compatibilidad: Son las condiciones que debe verificar un tensor simétrico de segundo orden para que pueda ser un tensor de deformación y que, por lo tanto, exista un campo de desplazamientos del cual provenga.

Observación 3-1

Nótese que para definir un tensor de deformación, no se pueden escribir de forma arbitraria las 6 componentes de un tensor simétrico. Es necesario que éstas verifiquen las condiciones de compatibilidad.

Observación 3-2

Dado un campo de desplazamientos, siempre podemos obtener, por derivación, un tensor de deformación asociado al mismo que automáticamente verificará las condiciones de compatibilidad. Así pues, en este caso no tiene sentido la verificación de estas condiciones.

3.2 Ejemplo preliminar: Ecuaciones de compatibilidad de un campo vectorial potencial

Dado un campo vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, se dice que es un *campo potencial* si existe una función escalar $\phi(\mathbf{x},t)$ (llamada función potencial) tal que su gradiente sea $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, es decir:

$$\begin{cases} \mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \nabla\phi(\mathbf{x},t) \\ \mathrm{v}_i(\mathbf{x},t) = \dfrac{\partial\phi(\mathbf{x},t)}{\partial x_i} \quad i \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{3.3}$$

Por lo tanto, dada una función escalar $\phi(\mathbf{x},t)$ (continua), siempre es posible definir un campo vectorial *potencial* $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ del cual aquella sea el potencial de acuerdo con la ecuación (3.3).

La cuestión que se plantea ahora es la inversa: dado un campo vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, ¿existe una función escalar $\phi(\mathbf{x},t)$ tal que $\nabla\Phi(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}(\mathbf{x},t)$? En componentes esto se escribe como:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad v_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ v_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad v_y - \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\ v_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad v_z - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

En (3.4) se tiene un sistema de E.D.P´s. con 3 ecuaciones y con 1 incógnita ($\phi(\mathbf{x},t)$), por lo que el sistema está sobredeterminado y puede no tener solución.

Derivando una vez las expresiones (3.4) respecto a (x, y, z) se tiene:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \\ &\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \\ &\frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} \qquad \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \qquad \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{3.5}$$

RECORDATORIO

El teorema de Schwartz (igualdad de derivadas cruzadas) garantiza que para una función $\Phi(x_1, x_2 \ldots . x_n)$ continua y con derivadas continuas se cumple:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j$$

La ecuación (3.5) representa un sistema de *9 ecuaciones*. Considerando el teorema de Schwartz se puede ver que en estas 9 ecuaciones intervienen *6 funciones* (derivadas segundas) *distintas* de la incógnita ϕ, a saber:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \tag{3.6}$$

por lo que podemos eliminarlas del sistema original (3.5) y establecer 3 relaciones, denominadas condiciones de compatibilidad, entre las derivadas espaciales primeras de las componentes de $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$.

Por lo tanto, para que exista una función escalar $\phi(\mathbf{x},t)$ tal que $\nabla\phi(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, el campo vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ dado debe verificar las siguientes ecuaciones de compatibilidad:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} &= 0 \overset{def}{=} S_z \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} &= 0 \overset{def}{=} S_y \\ \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} &= 0 \overset{def}{=} S_x \end{aligned}\right\} \text{ donde } \mathbf{S} \equiv \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{Bmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \equiv rot\ \mathbf{v} \overset{not}{=} \nabla \times \mathbf{v} \tag{3.7}$$

En consecuencia, de la ecuación (3.7), las ecuaciones de compatibilidad pueden escribirse como:

$$\text{Ecuaciones de compatibilidad de un campo vectorial potencial} \rightarrow \begin{cases} \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0 \quad i, j \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{3.8}$$

RECORDATORIO

Un teorema de la geometría diferencial establece que la divergencia del rotacional de *cualquier* campo es nula:
$\nabla \cdot [\nabla \times (\bullet)] = \mathbf{0}$

Observación 3-3

Las 3 ecuaciones de compatibilidad (3.7) o (3.8) no son independientes entre sí y puede establecerse una relación funcional entre ellas. En efecto, aplicando la condición de que la divergencia del rotacional de un campo vectorial es nula se obtiene:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$$

3.3 Condiciones de compatibilidad para las deformaciones infinitesimales

Sea el campo de deformaciones infinitesimales $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$ de componentes:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} \right) \quad i, j \in \{1,2,3\} \tag{3.9}$$

que puede ser descrito matricialmente mediante:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \times & \dfrac{\partial u_y}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ (\textit{simétrico}) & \times & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Debido a la simetría de la ecuación (3.10) solamente se obtienen de la misma 6 ecuaciones distintas:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} - \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \qquad & \varepsilon_{xy} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 0 \\ \varepsilon_{yy} - \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \qquad & \varepsilon_{xz} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0 \\ \varepsilon_{zz} - \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \qquad & \varepsilon_{yz} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

La ecuación (3.11) es un sistema de 6 E.D.P.'s con 3 incógnitas que son las componentes del vector de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. En general, este problema no tendrá solución salvo que se verifiquen ciertas condiciones de compatibilidad. Para obtener dichas condiciones se derivan dos veces las ecuaciones (3.11) respecto a las coordenadas espaciales y se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\left(\varepsilon_{xx}-\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)}{\partial x^2,\partial y^2,\partial z^2,\partial xy,\partial xz,\partial yz} &= \text{6 ecuaciones}\\
\vdots \qquad\qquad & \vdots\\
\vdots \qquad\qquad & \vdots\\
\frac{\partial^2\left(\varepsilon_{yz}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\right)}{\partial x^2,\partial y^2,\partial z^2,\partial xy,\partial xz,\partial yz} &= \text{6 ecuaciones}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

que proporcionan un total de 36 ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 u_x}{\partial x^3} && \frac{\partial^2\varepsilon_{yz}}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial z\partial x^2}+\frac{\partial^3 u_z}{\partial y\partial x^2}\right)\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial y^2}=\frac{\partial^3 u_x}{\partial x\partial y^2} && \frac{\partial^2\varepsilon_{yz}}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial z\partial y^2}+\frac{\partial^3 u_z}{\partial y^3}\right)\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial z^2}=\frac{\partial^3 u_x}{\partial x\partial z^2} \qquad \cdots && \frac{\partial^2\varepsilon_{yz}}{\partial z^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial z^3}+\frac{\partial^3 u_z}{\partial y\partial z^2}\right)\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^3 u_x}{\partial x^2\partial y} && \frac{\partial^2\varepsilon_{yz}}{\partial x\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial z\partial x\partial y}+\frac{\partial^3 u_z}{\partial y^2\partial x}\right)\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^3 u_x}{\partial x^2\partial z} && \frac{\partial^2\varepsilon_{yz}}{\partial x\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial z^2\partial x}+\frac{\partial^3 u_z}{\partial y\partial x\partial z}\right)\\
&\underbrace{\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^3 u_x}{\partial x\partial y\partial z}} && \underbrace{\frac{\partial^2\varepsilon_{yz}}{\partial y\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial z^2\partial y}+\frac{\partial^3 u_z}{\partial y^2\partial z}\right)}
\end{aligned} \quad . \tag{3.13}$$

$(\text{para } \varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz} = 18 \text{ ecuaciones})$ $\qquad$ $(\text{para } \varepsilon_{xy,}\,\varepsilon_{xz,}\,\varepsilon_{yz} = 18 \text{ ecuaciones})$

En estas 36 ecuaciones intervienen todas las posibles *terceras derivadas* de cada componente de los desplazamientos u_x, u_y y u_z. Se trata, por lo tanto, de 30 derivadas distintas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 u_x}{\partial x^3,\ \partial x^2 y,\ \partial x^2 z,\ \partial y^3,\ \partial y^2 x,\ \partial y^2 z,\ \partial z^3,\ \partial z^2 x,\ \partial z^2 y,\ \partial xyz} &= \text{10 derivadas}\\
\frac{\partial^3 u_y}{\partial x^3,\ \partial x^2 y,\ \partial x^2 z,\ \partial y^3,\ \partial y^2 x,\ \partial y^2 z,\ \partial z^3,\ \partial z^2 x,\ \partial z^2 y,\ \partial xyz} &= \text{10 derivadas}\\
\frac{\partial^3 u_z}{\partial x^3,\ \partial x^2 y,\ \partial x^2 z,\ \partial y^3,\ \partial y^2 x,\ \partial y^2 z,\ \partial z^3,\ \partial z^2 x,\ \partial z^2 y,\ \partial xyz} &= \text{10 derivadas}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

que constituyen las 30 incógnitas del sistema de 36 ecuaciones

$$f_n\underbrace{\left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j\partial x_k\partial x_l},\frac{\partial^2\varepsilon_{ij}}{\partial x_k\partial x_l}\right)}_{30} \quad n=1....36 \tag{3.15}$$

definido en (3.13).

Por lo tanto, de este sistema pueden eliminarse las 30 incógnitas *derivadas de los desplazamientos* $\dfrac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}$, obteniéndose 6 ecuaciones, en las que no aparecerán estas terceras derivadas, donde intervendrán las *21 derivadas segundas del tensor de deformaciones* $\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}$. Después de las correspondientes operaciones algebraicas, estas ecuaciones quedan:

$$\text{Ecuaciones de compatibilidad} \rightarrow \begin{cases} S_{xx} \overset{def}{=} \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = 0 \\ S_{yy} \overset{def}{=} \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} - 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} = 0 \\ S_{zz} \overset{def}{=} \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \\ S_{xy} \overset{def}{=} -\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \dfrac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \\ S_{xz} \overset{def}{=} -\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \dfrac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \\ S_{yz} \overset{def}{=} -\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

que constituyen *las ecuaciones de compatibilidad para el tensor infinitesimal de deformación* $\boldsymbol{\varepsilon}$. La expresión compacta correspondiente a las 6 ecuaciones (3.16) resulta ser:

$$\text{Ecuaciones de compatibilidad para el tensor infinitesimal de deformación} \rightarrow \mathbf{S} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\nabla}) = \mathbf{0} \tag{3.17}$$

Observación 3-4

Las 6 ecuaciones (3.16) no son funcionalmente independientes y, aprovechando de nuevo el hecho de que la divergencia del rotacional de un campo es intrínsecamente nula, pueden establecerse entre ellas las siguientes relaciones funcionales

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{S} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\nabla})) = \mathbf{0} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial S_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial S_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial S_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial S_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial S_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Otra forma de expresar las condiciones de compatibilidad (3.16) es utilizando el operador de tres índices denominado *operador de permutación* (e_{ijk}):

Observación 3-5

El operador de tres índices denominado *operador permutación* viene dado por:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0 \rightarrow \text{si algún índice se repite : (i = j o i = k o j = k)} \\ 1 \rightarrow \text{sentido positivo (horario) de índices : ijk} \in \{123, 231, 312\} \\ -1 \rightarrow \text{sentido negativo (antihorario) de índices : ijk} \in \{132, 321, 213\} \end{cases}$$

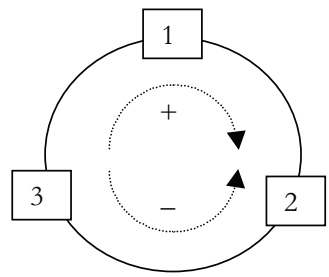


Figura 3-2

En este caso las ecuaciones de compatibilidad pueden escribirse:

$$\boxed{S_{mn} = e_{mjq} e_{nir} \varepsilon_{ij,qr} = 0} \tag{3.18}$$

Finalmente, otra posible expresión de las condiciones de compatibilidad es:

$$\boxed{\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad i,j,k,l \in \{1,2,3\}} \tag{3.19}$$

Observación 3-6

Puesto que las ecuaciones de compatibilidad (3.16) involucran solamente derivadas espaciales segundas de las componentes del tensor de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$, *cualquier tensor de deformación lineal* (polinómico de orden uno) respecto a las variables del *espacio será compatible* y, por lo tanto, integrable. Como caso particular, *todo tensor de deformación uniforme* $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ *será integrable.*

3.4 Integración del campo de deformaciones infinitesimales

3.4.1 Fórmulas preliminares

Sea el tensor de rotación $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x},t)$ para el caso de deformaciones infinitesimales (ver capítulo 2 , apartado 2.11.6):

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Omega} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{u}\otimes\boldsymbol{\nabla} - \boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}) \\ \Omega_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad i,j,\in\{1,2,3\} \end{cases} \tag{3.20}$$

y el vector rotación $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x},t)$, asociado al mismo, definido como:

RECORDATORIO

El tensor $\boldsymbol{\Omega}$ es antisimétrico

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2} rot\,\mathbf{u} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Omega_{23} \\ -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -\Omega_{yz} \\ -\Omega_{zx} \\ -\Omega_{xy} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Derivando el tensor de rotación (3.20) con respecto a la coordenada x_k se obtiene:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \Rightarrow \quad \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] \tag{3.22}$$

Sumando y restando en la ecuación (3.22) el término $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j}$ y reordenando se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_k} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)}_{\varepsilon_{ik}} - \frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)}_{\varepsilon_{jk}} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} \end{aligned} \tag{3.23}$$

La ecuación (3.23) puede utilizarse ahora para calcular las derivadas cartesianas de las componentes del vector velocidad de rotación, $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x},t)$, de la ecuación (3.21), obteniéndose:

$$\boldsymbol{\nabla}\theta_1 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \theta_1}{\partial x} = -\dfrac{\partial \Omega_{yz}}{\partial x} = \dfrac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \dfrac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \theta_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial \Omega_{yz}}{\partial y} = \dfrac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} - \dfrac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \theta_1}{\partial z} = -\dfrac{\partial \Omega_{yz}}{\partial z} = \dfrac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} - \dfrac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial z} \end{cases} \tag{3.24}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\theta_2 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \theta_2}{\partial x} = -\dfrac{\partial \Omega_{zx}}{\partial x} = \dfrac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} - \dfrac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \theta_2}{\partial y} = -\dfrac{\partial \Omega_{zx}}{\partial y} = \dfrac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \dfrac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \theta_2}{\partial z} = -\dfrac{\partial \Omega_{zx}}{\partial z} = \dfrac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z} - \dfrac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x} \end{cases} \tag{3.25}$$

$$\nabla\theta_3 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_3}{\partial x} = -\dfrac{\partial\Omega_{xy}}{\partial x} = \dfrac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x} - \dfrac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\theta_3}{\partial y} = -\dfrac{\partial\Omega_{xy}}{\partial y} = \dfrac{\partial\varepsilon_{yy}}{\partial x} - \dfrac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\theta_3}{\partial z} = -\dfrac{\partial\Omega_{xy}}{\partial z} = \dfrac{\partial\varepsilon_{yz}}{\partial x} - \dfrac{\partial\varepsilon_{xz}}{\partial y} \end{cases} \tag{3.26}$$

Supongamos ahora conocido el vector de rotación $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x},t)$ y, a través de él mediante las ecuaciones (3.21), el tensor de rotación $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x},t)$. Considerando el tensor gradiente de los desplazamientos $\mathbf{J}(\mathbf{x},t)$ (ver capítulo 2, apartado 2.11.6) puede escribirse:

$$\begin{cases} \mathbf{J} = \dfrac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{\partial\mathbf{x}} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\Omega} \\ J_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underbrace{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\varepsilon_{ij}} + \underbrace{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\Omega_{ij}} = \varepsilon_{ij} + \Omega_{ij} \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{3.27}$$

Finalmente, escribiendo de forma explícita las diversas componentes de la ecuación (3.27) y teniendo en cuenta la ecuación (3.21) se obtiene:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$:	$\dfrac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx}$	$\dfrac{\partial u_x}{\partial y} = \varepsilon_{xy} - \theta_3$	$\dfrac{\partial u_x}{\partial z} = \varepsilon_{xz} + \theta_2$
$i=2$:	$\dfrac{\partial u_y}{\partial x} = \varepsilon_{xy} + \theta_3$	$\dfrac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_{yy}$	$\dfrac{\partial u_y}{\partial z} = \varepsilon_{yz} - \theta_1$
$i=3$:	$\dfrac{\partial u_z}{\partial x} = \varepsilon_{xz} - \theta_2$	$\dfrac{\partial u_z}{\partial y} = \varepsilon_{yz} + \theta_1$	$\dfrac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_{zz}$

(3.28)

NOTA

De acuerdo con la ecuación (3.21) el tensor $\boldsymbol{\Omega}$ puede escribirse como:

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4.2 Integración del campo de deformaciones

Sea $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ el campo de deformaciones infinitesimales que se quiere integrar Esta operación se hará en dos pasos:

1) Utilizando las expresiones (3.24) a (3.26), *se integra el vector de rotación* $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x},t)$. La integración, respecto al espacio, del vector de rotación en las ecuaciones (3.24) a (3.26) conducirá a soluciones del tipo:

$$\theta_i = \tilde{\theta}_i(x,y,z,t) + c_i(t) \quad i \in \{1,2,3\} \tag{3.29}$$

donde las constantes de integración, $c_i(t)$, que en general pueden ser función del tiempo, se pueden determinar conociendo el valor (o la evolución a lo largo del tiempo) del vector de rotación en algún punto del medio.

2) En un segundo paso, conocidos ahora el tensor de deformación infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ y el vector de rotación $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x},t)$, *se integra el campo de desplazamientos* $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ utilizando el sistema de E.D.P´s de primer orden (3.28) obteniéndose:

$$u_i = \tilde{u}_i(x,y,z,t) + c_i'(t) \qquad i \in \{1,2,3\} \tag{3.30}$$

De nuevo, las constantes de integración $c_i'(t)$ que aparecen en la ecuación (3.30), que en general serán función del tiempo, se determinarán conociendo el valor (o la evolución a lo largo del tiempo) de los desplazamientos en algún punto del espacio.

Observación 3-7

Los procesos de integración de los pasos 1) y 2) implican integrar sistemas de E.D.P.´s de primer orden. Si se cumplen las ecuaciones de compatibilidad (3.16), estos sistemas serán integrables (sin conducir a contradicciones en su integración) permitiendo, finalmente, la obtención del campo de desplazamientos

Observación 3-8

La aparición de las constantes de integración en las ecuaciones (3.29) y (3.30) pone de manifiesto que un tensor de deformación integrable, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$, determina el movimiento en cada instante de tiempo salvo una rotación $\mathbf{c}(t) \overset{not}{=} \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ y una traslación $\mathbf{c}'(t) \overset{not}{=} \hat{\mathbf{u}}(t)$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t) \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x},t) = \tilde{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x},t) + \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) + \hat{\mathbf{u}}(t) \end{cases}$$

A partir de dicha rotación $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ y traslación $\hat{\mathbf{u}}(t)$ uniformes, puede construirse el siguiente campo de desplazamientos:

$$\boxed{\mathbf{u}^*(\mathbf{x},t) = \hat{\boldsymbol{\Omega}}(t)\,\mathbf{x} + \hat{\mathbf{u}}(t)} \qquad (\Rightarrow \mathbf{u}^* \otimes \boldsymbol{\nabla} = \hat{\boldsymbol{\Omega}})$$

que se denomina *desplazamiento de sólido rígido*. En efecto, la deformación asociada a dicho desplazamiento es nula:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x},t) = \boldsymbol{\nabla}^S \mathbf{u}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^* \otimes \boldsymbol{\nabla} + \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}^*) = \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\Omega}} + \underbrace{\hat{\boldsymbol{\Omega}}^T}_{-\hat{\boldsymbol{\Omega}}}) = \mathbf{0}$$

tal como corresponde al concepto de sólido rígido (sin deformación). Por consiguiente, puede concluirse que *todo campo de deformación compatible determina los desplazamientos del medio continuo salvo un desplazamiento de sólido rígido,* el cual debe determinarse con las condiciones de contorno apropiadas.

NOTA

El tensor de rotación de sólido rígido $\hat{\boldsymbol{\Omega}}(t)$ (antisimétrico) se construye a partir del vector de rotación $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ como:

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \hat{\Omega}_{12} & -\hat{\Omega}_{31} \\ -\hat{\Omega}_{12} & 0 & \hat{\Omega}_{23} \\ \hat{\Omega}_{31} & -\hat{\Omega}_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\theta}_3 & \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_3 & 0 & -\hat{\theta}_1 \\ -\hat{\theta}_2 & \hat{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3-1

Para un cierto movimiento el tensor de deformación infinitesimal tiene el siguiente valor:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)=\begin{bmatrix} 8x & -\frac{y}{2} & \frac{3}{2}x^2z \\ -\frac{y}{2} & x & 0 \\ \frac{3}{2}x^2z & 0 & x^3 \end{bmatrix}$$

Obtener el vector de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ *y el tensor de rotación* $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x},t)$ *sabiendo que:* $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\big|_{\mathbf{x}=(0,0,0)^T}=\{3t,0,0\}^T$ y $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x},t)\big|_{\mathbf{x}=(0,0,0)^T}=\mathbf{0}$.

1) ***Vector de rotación***:

Planteando los sistemas de ecuaciones(3.24) a (3.26), se obtiene:

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial x}=0 \quad ; \quad \frac{\partial\theta_1}{\partial y}=0 \quad ; \quad \frac{\partial\theta_1}{\partial z}=0 \qquad \Rightarrow \theta_1=C_1(t)$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial x}=-3xz \quad ; \quad \frac{\partial\theta_2}{\partial y}=0 \quad ; \quad \frac{\partial\theta_2}{\partial z}=-\frac{3}{2}x^2 \qquad \Rightarrow \theta_2=-\frac{3}{2}x^2z+C_2(t)$$

$$\frac{\partial\theta_3}{\partial x}=0 \quad ; \quad \frac{\partial\theta_3}{\partial y}=\frac{3}{2} \quad ; \quad \frac{\partial\theta_3}{\partial z}=0 \qquad \Rightarrow \theta_3=\frac{3}{2}y+C_3(t)$$

Las constantes de integración $C_i(t)$ se determinan imponiendo que $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x},t)\big|_{\mathbf{x}=(0,0,0)^T}=\mathbf{0}$ (y por tanto el vector de rotación $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x},t)\big|_{\mathbf{x}=(0,0,0)^T}=\mathbf{0}$) obteniéndose:

$$C_1(t)=C_2(t)=C_3(t)=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})=\begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}x^2z \\ \frac{3}{2}y \end{Bmatrix}$$

y el tensor de rotación resulta ser:

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2}y & -\frac{3}{2}x^2z \\ \frac{3}{2}y & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}x^2z & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Vector de desplazamientos:

Planteando, e integrando, los sistemas de ecuaciones (3.28) se tiene:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=8x \quad ; \quad \frac{\partial u_1}{\partial y}=-2y \quad ; \quad \frac{\partial u_1}{\partial z}=0 \quad \Rightarrow \quad u_1=4x^2-y^2+C_1'(t)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}=y \quad ; \quad \frac{\partial u_2}{\partial y}=x \quad ; \quad \frac{\partial u_2}{\partial z}=0 \quad \Rightarrow \quad u_2=xy+C_2'(t)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x}=3x^2z \quad ; \quad \frac{\partial u_3}{\partial y}=0 \quad ; \quad \frac{\partial u_3}{\partial z}=x^3 \quad \Rightarrow \quad u_3=x^3z+C_3'(t)$$

e imponiendo que $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)|_{\mathbf{x}=(0,0,0)^T} = \{3t,0,0\}^T$:

$$C_1(t) = 3t \quad ; \quad C_2(t) = C_3(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \begin{Bmatrix} 4x^2 - y^2 + 3t \\ xy \\ x^3 z \end{Bmatrix}$$

3.5 Ecuaciones de compatibilidad e integración del tensor velocidad de deformación

Teniendo en cuenta las definiciones de los tensores de deformación infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon}$ del tensor de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ y del vector de rotación $\boldsymbol{\theta}$, existe una clara correspondencia entre estas magnitudes y a) el tensor velocidad de deformación $\mathbf{d}$, b) el tensor velocidad de rotación $\mathbf{w}$ (o tensor spin) y c) el vector velocidad de rotación $\boldsymbol{\omega}$ dados en el capítulo 2. Dichas correspondencias se pueden establecer como sigue:

$$\begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \mathbf{v} \\ \mathbf{d}(\mathbf{v}) \\ d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_i} \right) \\ \mathrm{w}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_i} \right) \\ \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} \end{array} \tag{3.31}$$

Es evidente entonces que el concepto de compatibilidad de un campo de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ introducido en el apartado 3.1 puede extenderse, en virtud de la correspondencia (3.31), a la compatibilidad de un campo de velocidad de deformación $\mathbf{d}(\mathbf{x},t)$.

Para integrar dicho campo se podrá utilizar el mismo procedimiento visto en el apartado 3.4.2 sustituyendo $\boldsymbol{\varepsilon}$ por $\mathbf{d}$, $\mathbf{u}$ por $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\Omega}$ por $\mathbf{w}$ y $\boldsymbol{\theta}$ por $\boldsymbol{\omega}$. Ciertamente esta integración solo podrá llevarse a cabo si se cumplen las ecuaciones de compatibilidad (3.16) en las componentes de $\mathbf{d}(\mathbf{x},t)$.

Observación 3-9

Las ecuaciones de compatibilidad resultantes y el proceso de integración del tensor velocidad de deformación $\mathbf{d}(\mathbf{x},t)$ no están, en este caso, restringidos al caso de deformación infinitesimal.

4 Tensión

4.1 Fuerzas másicas y superficiales

Consideraremos que las fuerzas que pueden actuar sobre un medio continuo pueden ser de dos tipos: *fuerzas másicas* y *fuerzas de superficie* (o superficiales).

4.1.1 Fuerzas másicas

Definición:

Fuerzas másicas: son las fuerzas que se ejercen a distancia sobre las partículas del interior del medio continuo. Ejemplos de dicho tipo de fuerzas son las fuerzas gravitatorias, las inerciales o las de atracción magnética.

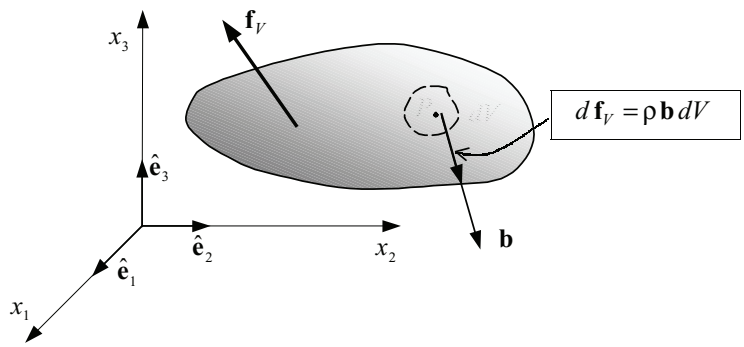


Figura 4-1– Fuerzas másicas en el medio continuo

Sea $\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$ la descripción espacial del campo vectorial *fuerzas másicas por unidad de masa*. Multiplicando el *vector de fuerzas másicas* $\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$ por la densidad ρ, se obtiene el vector de fuerzas másicas por unidad de volumen $\rho\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$ *(densidad de fuerzas másicas*). La resultante total, $\mathbf{f}_V$, de las fuerzas másicas sobre el volumen material V de la Figura 4-1 será:

$$\mathbf{f}_V = \int_V \rho\,\mathbf{b}(\mathbf{x},t)\,dV \tag{4.1}$$

Observación 4-1

En la definición de las fuerzas de volumen dada en (4.1), se acepta implícitamente la existencia del vector $\rho\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$ de densidad de fuerzas másicas. Esto supone que, dada una secuencia arbitraria de volúmenes ΔV_i que contienen a la partícula P y la correspondiente secuencia de fuerzas másicas $\mathbf{f}_{\Delta V_i}$, existe el límite $\rho\mathbf{b}(\mathbf{x},t) = \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{\mathbf{f}_{\Delta V_i}}{\Delta V_i}$ y además es independiente de la secuencia de volúmenes considerada.

Ejemplo 4-1 – Para un medio continuo, de volumen V, situado en la superficie terrestre, obtener el valor de la resultante de las fuerzas másicas en función de la constante gravitatoria g.

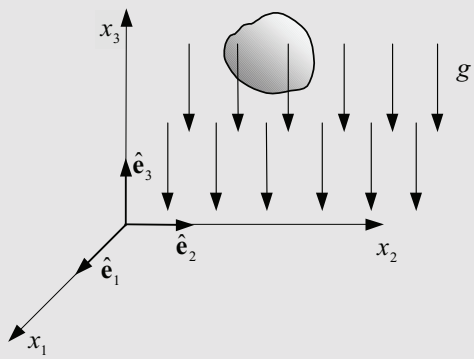


Figura 4-2– Campo gravitacional

Suponiendo un sistema de ejes cartesianos (ver Figura 4-2) tal que el eje x_3 tenga la dirección de la vertical desde el centro de la tierra el campo vectorial $\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$ de las fuerzas gravitatorias por unidad de masa es:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x},t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

y el valor de las fuerzas másicas puede calcularse como:

$$\mathbf{f}_V = \int_V \rho\,\mathbf{b}(\mathbf{x},t)\,dV = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\int_V \rho\, g\, dV \end{bmatrix}$$

4.1.2 Fuerzas superficiales

Definición:

Fuerzas superficiales: fuerzas que actúan sobre el *contorno* del volumen material considerado. Pueden considerarse producidas por las *acciones de contacto* de las partículas situadas en el contorno del medio con el exterior del mismo.

Sea $\mathbf{t}(\mathbf{x},t)$ la descripción espacial del campo vectorial de fuerzas superficiales *por unidad de superficie* en el medio continuo de la Figura 4-3. La fuerza resultante sobre un elemento diferencial de superficie dS será $\mathbf{t}\cdot dS$ y la resultante total de las fuerzas de superficie actuando en el contorno ∂V del volumen V podrá escribirse como:

$$\mathbf{f}_S = \int_{\partial V} \mathbf{t}(\mathbf{x},t)\, dS \tag{4.2}$$

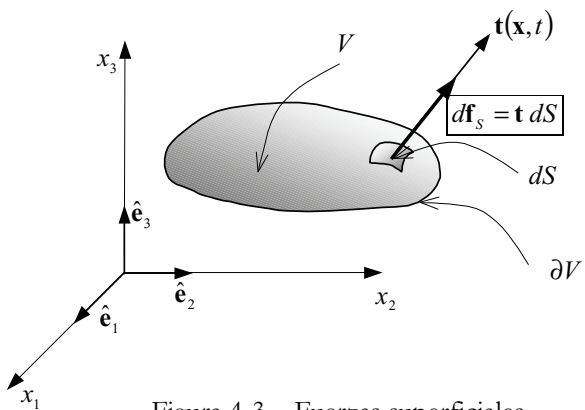


Figura 4-3 – Fuerzas superficiales

TERMINOLOGIA

En la literatura suele denominarse *vector de tracción* al vector de fuerzas superficiales por unidad de superficie $\mathbf{t}$, aunque este concepto puede ser extendido a puntos del interior del medio continuo

Observación 4-2

En la definición de las fuerzas de superficie dada en (4.2) se considera implícitamente la existencia del vector de fuerzas superficiales por unidad de superficie $\mathbf{t}(\mathbf{x},t)$ (vector de tracción). En otras palabras, si se considera una secuencia de superficies ΔS_i, todas ellas conteniendo al punto P, y las correspondientes fuerzas superficiales $\mathbf{f}_{\Delta S_i}$ (ver Figura 4-4), se supone que existe el límite $\mathbf{t}(\mathbf{x},t) = \lim_{\Delta S_i \to 0} \frac{\mathbf{f}_{\Delta S_i}}{\Delta S_i}$ y que éste es independiente de la secuencia de superficies elegida.

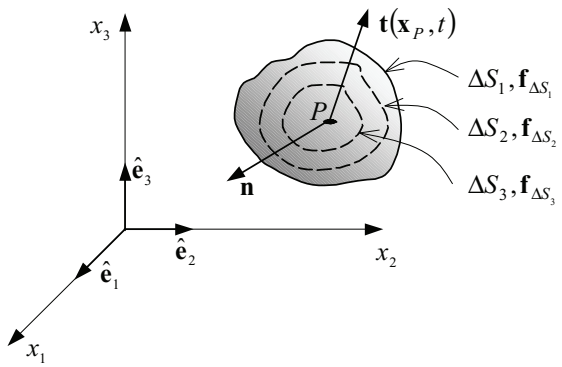


Figura 4-4– Vector de tracción

4.2 Postulados de Cauchy

Consideremos un medio continuo sobre el que actúan las correspondientes fuerzas másicas y superficiales (ver Figura 4-5). Consideremos también una partícula P del interior del medio continuo y una superficie arbitraria, que pasa por el punto P y de normal unitaria **n** en dicho punto, que divide al medio continuo en dos partes (volúmenes materiales). En la superficie de corte, considerada ahora como parte del contorno de cada uno de estos volúmenes materiales, actuarán las fuerzas superficiales debidas al contacto entre ambos.

Sea **t** el vector de tracción que actúa en el punto P considerado como parte del contorno del primero de estos volúmenes materiales. En principio este vector de tracción (definido ahora en un punto material del interior del medio continuo original) dependerá:

1) De cuál sea la partícula considerada,
2) de la orientación de la superficie (definida a través de la normal **n**) y
3) de cuál sea la propia superficie de corte.

El siguiente postulado lo hace independiente de esta última condición:

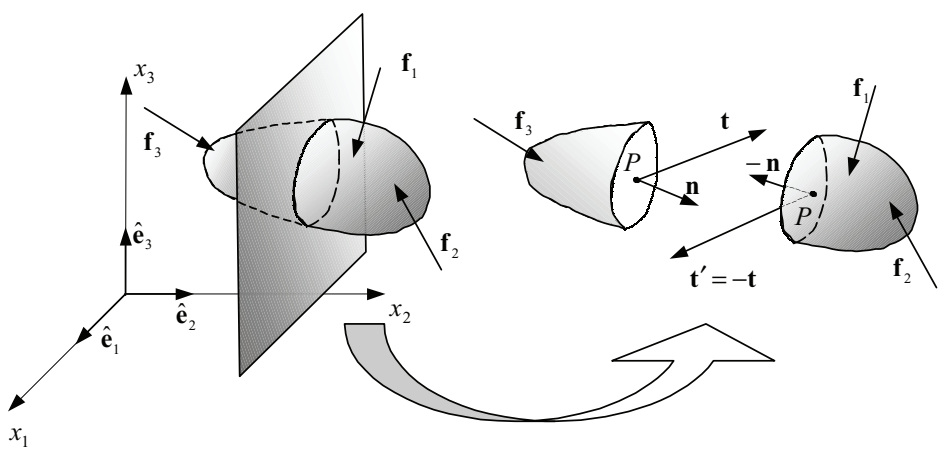


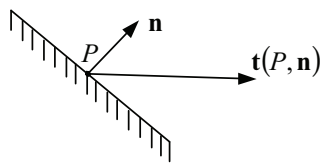
Figura 4-5–Postulados de Cauchy

RECORDATORIO

Un *postulado* es un ingrediente fundamental de una teoría que se formula como principio de la misma y que, como tal, no admite demostración.

Observación 4-3

1er Postulado de Cauchy: El vector de tracción que actúa en un punto material P de un medio continuo según un plano de normal unitaria **n,** depende únicamente del punto P y de la normal **n** $\boxed{\mathbf{t} = \mathbf{t}(P, \mathbf{n})}$.



Observación 4-4

Sea una partícula P de un medio continuo y consideremos distintas superficies que pasan por el punto P de forma que todas ellas tienen el mismo vector normal **n** en dicho punto. De acuerdo con el postulado de Cauchy, los vectores de tracción en el punto P, según cada una de estas superficies, coinciden. Por el contrario, si la normal a las superficies en P es distinta, los correspondientes vectores de tracción ya no coinciden (Figura 4-6).

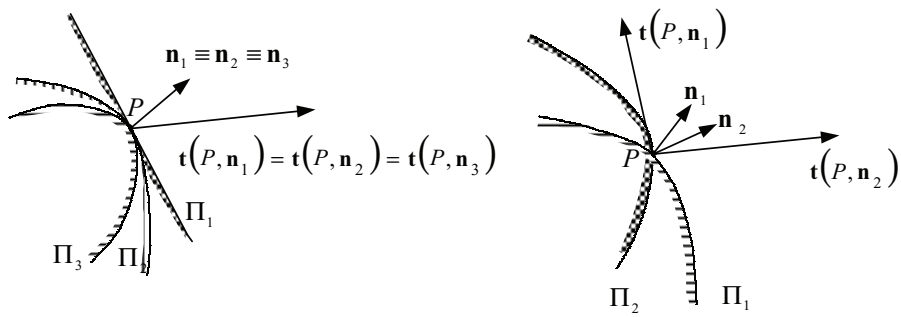


Figura 4-6– Vector de tracción en un punto según distintas superficies

Observación 4-5

2º Postulado de Cauchy - Principio de acción y reacción: El vector de tracciones en un punto P de un medio continuo, según un plano de normal unitaria **n**, es igual y de sentido contrario al vector de tracciones en el mismo punto P según un plano de normal unitaria $-\mathbf{n}$ en el mismo punto (ver Figura 4-5):

$$\boxed{\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(P, -\mathbf{n})}$$

4.3 Tensor de tensiones

4.3.1 Preliminares: aplicación de la 2ª ley de Newton a un medio continuo

Consideremos un sistema discreto de partículas en movimiento, tal que una partícula genérica i del mismo tiene una masa m_i, una velocidad $\mathbf{v}_i$ y una aceleración $\mathbf{a}_i = \dfrac{d\mathbf{v}_i}{dt}$. Sobre cada partícula i actúa además una fuerza $\mathbf{f}_i$ que se relaciona con su aceleración a través de la segunda ley de Newton

$$\mathbf{f}_i = m_i \mathbf{a}_i \tag{4.3}$$

y la resultante $\mathbf{R}$ de las fuerzas que actúan sobre todas las partículas del sistema resulta ser:

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{f}_i = \sum_i m_i \mathbf{a}_i \tag{4.4}$$

Los conceptos anteriores pueden generalizarse para el caso de medios continuos entendidos como sistemas discretos constituidos por un número infinito de partículas. En este caso la aplicación de la segunda ley de Newton a un medio continuo de masa total M, sobre el que actúan unas fuerzas exteriores caracterizadas por el vector de densidad de fuerzas másicas $\rho\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$ y el vector de tracción $\mathbf{t}(\mathbf{x},t)$, cuyas partículas tienen una aceleración $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$ y que ocupa en el instante t el volumen de espacio V_t se escribe:

$$\mathbf{R} = \underbrace{\int_{V_t} \rho\,\mathbf{b}\,dV}_{\substack{\text{Resultante de}\\ \text{las fuerzas}\\ \text{másicas}}} + \underbrace{\int_{\partial V_t} \mathbf{t}\,dS}_{\substack{\text{Resultante de}\\ \text{las fuerzas}\\ \text{superficia les}}} = \int_M \mathbf{a}\,\underbrace{dm}_{\rho dV} = \int_{V_t} \rho\,\mathbf{a}\,dV \tag{4.5}$$

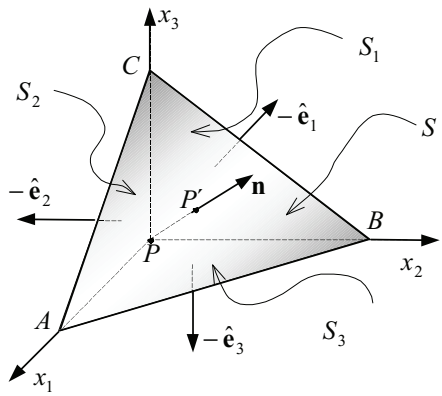
4.3.2 Tensor de tensiones

Consideremos ahora el caso particular de volumen material constituido por un tetraedro elemental situado alrededor de una partícula arbitraria P del interior del medio continuo, y orientado según se muestra en la Figura 4-7. Sin pérdida de generalidad puede situarse el origen de coordenadas en P.

El tetraedro tiene un vértice en P y sus caras quedan definidas mediante un plano de normal $\mathbf{n} \equiv \{n_1, n_2, n_3\}^T$ que intersecta con los planos coordenados definiendo una superficie genérica de área S (la base del tetraedro) a una distancia h (la altura del tetraedro) del punto P. A su vez, los planos coordenados definen las otras caras del tetraedro de áreas S_1, S_2 y S_3 con normales (hacia fuera) $-\hat{\mathbf{e}}_1$, $-\hat{\mathbf{e}}_2$ y $-\hat{\mathbf{e}}_3$, respectivamente. Por consideraciones geométricas pueden establecerse las relaciones:

$$S_1 = n_1 S \quad S_2 = n_2 S \quad S_3 = n_3 S \tag{4.6}$$

En la Figura 4-8, se introduce la notación para los vectores de tracción en cada una de las caras del tetraedro considerado y asociados a las correspondientes normales.



$\widehat{ABC} = S$

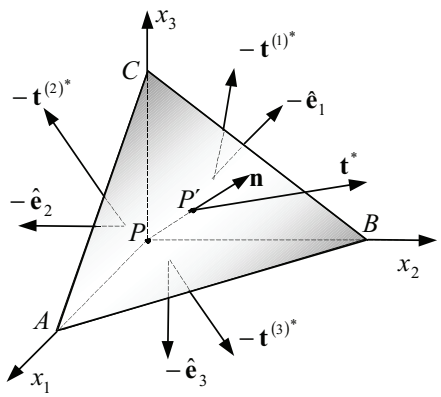
$\widehat{BPC} = S_1 = n_1 S$

$\widehat{APC} = S_2 = n_2 S$

$\widehat{APB} = S_3 = n_3 S$

$\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}^T$

Figura 4-7 – Tetraedro elemental alrededor de un punto material P



$\overline{PP'} \,//\, \mathbf{n}$

$\widehat{ABC} = S =$ área de la base del tetraedro

$\left|\overline{PP'}\right| =$ h = altura del tetraedro

$V = \frac{1}{3} S\, h \equiv$ volumen del tetraedro

Figura 4-8 – Vectores de tracción en el tetraedro elemental

Por el segundo postulado de Cauchy (ver Observación 4-5) el vector de tracción sobre un punto genérico $\mathbf{x}$ de una de las superficies S_i (de normal hacia fuera $-\hat{\mathbf{e}}_i$) puede escribirse

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\hat{\mathbf{e}}_i) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{e}}_i) \overset{not}{=} -\mathbf{t}^{(i)}(\mathbf{x}) \quad i \in \{1,2,3\} \tag{4.7}$$

Observación 4-6

Teorema del valor medio: Dada una función (escalar, vectorial o tensorial) *continua* en el interior de un dominio (compacto), la función alcanza su valor medio *en el interior* de dicho dominio.

En términos matemáticos:

$$\text{Dada } f(\mathbf{x}) \text{ continua en } \Omega, \quad \exists \mathbf{x}^* \in \Omega \;\Big|\; \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\, d\Omega = \Omega \cdot \underbrace{f(\mathbf{x}^*)}_{\substack{\text{Valor} \\ \text{medio} \\ \text{de } f \text{ en } \Omega}}$$

En la Figura 4-9 puede verse la interpretación gráfica del teorema del valor medio en una dimensión.

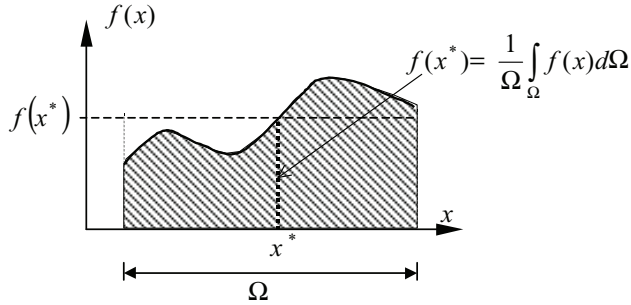


Figura 4-9 – Teorema del valor medio

En virtud del teorema del valor medio el campo vectorial $\mathbf{t}^{(i)}(\mathbf{x})$, supuesto continuo en el dominio S_i, alcanza su valor medio en el interior del mismo. Sea $\mathbf{x}^*_{S_i} \in S_i$ el punto donde se alcanza del valor medio y $\mathbf{t}^{(i)^*} = \mathbf{t}^{(i)}(\mathbf{x}^*_{S_i})$ dicho valor medio. De forma análoga sean $\mathbf{t}^* = \mathbf{t}(\mathbf{x}^*_S)$, $\rho^*\mathbf{b}^* = \rho(\mathbf{x}^*_V)\,\mathbf{b}(\mathbf{x}^*_V)$ y $\rho^*\mathbf{a}^* = \rho(\mathbf{x}^*_V)\,\mathbf{a}(\mathbf{x}^*_V)$ los correspondientes valores medios de los campos: vector de tracción $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ en S, densidad de fuerzas másicas $\rho\,\mathbf{b}(\mathbf{x})$ y de aceleración $\rho\,\mathbf{a}(\mathbf{x})$, los cuales, de nuevo en virtud del teorema del valor medio, se alcanzan en los puntos, $\mathbf{x}^*_s \in S$ y $\mathbf{x}^*_V \in V$ *del interior* de los correspondientes dominios. En consecuencia puede escribirse:

$$\begin{aligned}
&\int_{S_i} \mathbf{t}^{(i)}(\mathbf{x})\,dS = \mathbf{t}^{(i)^*}\cdot S_i \qquad i \in \{1,2,3\}\\
&\int_{S} \mathbf{t}(\mathbf{x})\,dS = \mathbf{t}^*\cdot S\\
&\int_{V} \rho(\mathbf{x})\,\mathbf{b}(\mathbf{x})\,dV = \rho^*\mathbf{b}^*\cdot V\\
&\int_{V} \rho(\mathbf{x})\,\mathbf{a}(\mathbf{x})\,dV = \rho^*\mathbf{a}^*\cdot V
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Aplicando ahora la ecuación (4.5) al tetraedro considerado, se tendrá:

$$\begin{aligned}
&\int_V \rho\,\mathbf{b}\,dV + \int_S \mathbf{t}\,dS + \int_{S_1} \mathbf{t}\,dS + \int_{S_2} \mathbf{t}\,dS + \int_{S_3} \mathbf{t}\,dS =\\
&= \int_V \rho\,\mathbf{b}\,dV + \int_S \mathbf{t}\,dS + \int_{S_1} (-\mathbf{t}^{(1)})dS + \int_{S_2} (-\mathbf{t}^{(2)})\,dS + \int_{S_3} (-\mathbf{t}^{(3)})\,dS = \int_V \rho\,\mathbf{a}\,dV
\end{aligned} \tag{4.9}$$

donde se ha tenido en cuenta la ecuación (4.7). Substituyendo la ecuación (4.8) en la expresión (4.9), ésta se puede escribir en términos de los valores medios como:

$$\rho^*\,\mathbf{b}^*\,V + \mathbf{t}^*\,S - \mathbf{t}^{(1)^*}S_1 - \mathbf{t}^{(2)^*}\,S_2 - \mathbf{t}^{(3)^*}S_3 = \rho^*\,\mathbf{a}^*\,V \tag{4.10}$$

Substituyendo ahora la ecuación (4.6) y expresando el volumen total de la pirámide como $V = \frac{1}{3} S\,h$ la ecuación (4.10), puede escribirse como:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\rho^*\,\mathbf{b}^*\,\mathrm{h}S+\mathbf{t}^*S-\mathbf{t}^{(1)^*}\mathrm{n}_1S-\mathbf{t}^{(2)^*}\mathrm{n}_2S-\mathbf{t}^{(3)^*}\mathrm{n}_3S=\frac{1}{3}\rho^*\,\mathbf{a}^*\,\mathrm{h}S\Rightarrow\\&\frac{1}{3}\rho^*\,\mathbf{b}^*\,\mathrm{h}+\mathbf{t}^*-\mathbf{t}^{(1)^*}\mathrm{n}_1-\mathbf{t}^{(2)^*}\mathrm{n}_2-\mathbf{t}^{(3)^*}\mathrm{n}_3=\frac{1}{3}\rho^*\,\mathbf{a}^*\,\mathrm{h}\end{aligned}\tag{4.11}$$

La expresión (4.11) es válida para *cualquier* tetraedro definido por un plano de normal $\mathbf{n}$ situado a una distancia h del punto P. Si se considera ahora un tetraedro infinitesimal, alrededor del punto P, haciendo tender a cero el valor de $|\overline{PP'}|=\mathrm{h}$ pero manteniendo constante la orientación del plano ($\mathbf{n}$ =constante), en la ecuación (4.11) se tiene que los dominios S_i, S y V colapsan en el punto P (ver Figura 4-7), con lo cual los puntos de los respectivos dominios en los que se obtienen los valores medios tienden también al punto P:

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}^*_{S_i}\to\mathbf{x}_P\Rightarrow\underset{h\to0}{\ell im}\left[\mathbf{t}^{(i)^*}\left(\mathbf{x}^*_{S_i}\right)\right]=\mathbf{t}^{(i)}(P)\qquad i\in\{1,2,3\}\\&\mathbf{x}^*_{S}\to\mathbf{x}_P\Rightarrow\underset{h\to0}{\ell im}\left[\mathbf{t}^{*}\left(\mathbf{x}^*_{S},\mathbf{n}\right)\right]=\mathbf{t}(P,\mathbf{n})\end{aligned}\tag{4.12}$$

y además

$$\underset{h\to0}{\ell im}\left(\frac{1}{3}\rho^*\,\mathbf{b}^*\,\mathrm{h}\right)=\underset{h\to0}{\ell im}\left(\frac{1}{3}\rho^*\,\mathbf{a}^*\,\mathrm{h}\right)=0\tag{4.13}$$

Tomando ahora el límite de la ecuación (4.11) y substituyendo las (4.12) y (4.13) la expresión (4.11), conduce a:

$$\mathbf{t}(P,\mathbf{n})-\mathbf{t}^{(1)}\mathrm{n}_1-\mathbf{t}^{(2)}\mathrm{n}_2-\mathbf{t}^{(3)}\mathrm{n}_3=\mathbf{0}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{t}(P,\mathbf{n})-\mathbf{t}^{(i)}\mathrm{n}_i=\mathbf{0}\tag{4.14}$$

El vector de tracciones $\mathbf{t}^{(1)}$ puede escribirse en función de sus componentes cartesianas, ver Figura 4-10, como:

$$\mathbf{t}^{(1)}=\sigma_{11}\hat{\mathbf{e}}_1+\sigma_{12}\hat{\mathbf{e}}_2+\sigma_{13}\hat{\mathbf{e}}_3=\sigma_{1i}\hat{\mathbf{e}}_i\tag{4.15}$$

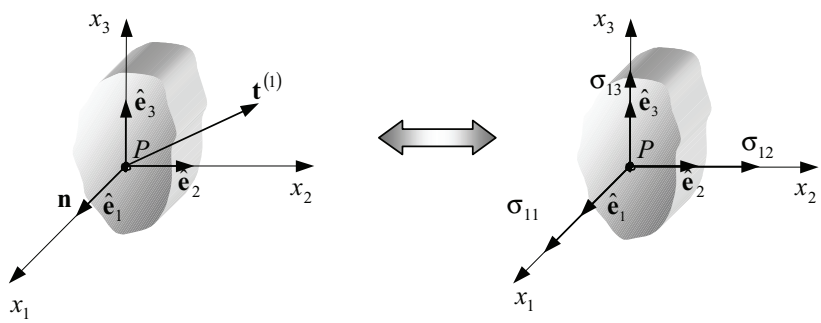


Figura 4-10 – Descomposición en componentes del vector de tracción $\mathbf{t}^{(1)}$

Operación que puede realizarse en forma análoga por los vectores de tracción $\mathbf{t}^{(2)}$ y $\mathbf{t}^{(3)}$ (ver Figura 4-11):

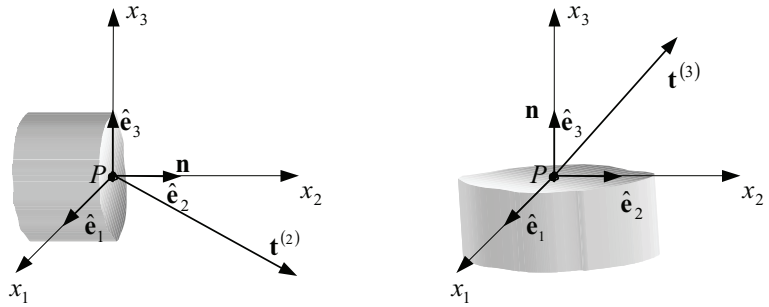


Figura 4-11– Vectores de tracción $\mathbf{t}^{(2)}$ y $\mathbf{t}^{(3)}$

$$\mathbf{t}^{(2)} = \sigma_{21}\hat{\mathbf{e}}_1 + \sigma_{22}\hat{\mathbf{e}}_2 + \sigma_{23}\hat{\mathbf{e}}_3 = \sigma_{2i}\hat{\mathbf{e}}_i \tag{4.16}$$

$$\mathbf{t}^{(3)} = \sigma_{31}\hat{\mathbf{e}}_1 + \sigma_{32}\hat{\mathbf{e}}_2 + \sigma_{33}\hat{\mathbf{e}}_3 = \sigma_{3i}\hat{\mathbf{e}}_i \tag{4.17}$$

Resultando para el caso general:

$$\mathbf{t}^{(i)}(P) = \sigma_{ij}\hat{\mathbf{e}}_j \qquad i, j \in \{1,2,3\} \tag{4.18}$$

$$\boxed{\sigma_{ij}(P) = t_j^{(i)}(P) \qquad i, j \in \{1,2,3\}} \tag{4.19}$$

Observación 4-7

Nótese que en la expresión (4.19) las funciones σ_{ij} son funciones de (las componentes de) los vectores de tracción $t_j^{(i)}(P)$ *sobre superficies específicamente orientadas* en el punto P. Se enfatiza, pues, que dichas funciones dependen del punto P, pero no de la normal $\mathbf{n}$:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(P)$$

Substituyendo la ecuación (4.19) en la (4.14):

$$\mathbf{t}(P,\mathbf{n}) = n_i \mathbf{t}^{(i)} \Rightarrow t_j(P,\mathbf{n}) = n_i\, t_j^{(i)}(P) = n_i\, \sigma_{ij}(P) \quad i, j \in \{1,2,3\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{t}(P,\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(P)} \tag{4.20}$$

donde se ha definido el *Tensor de Tensiones de Cauchy* $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \tag{4.21}$$

Observación 4-8

Nótese que la expresión (4.20) $\mathbf{t}(P,\mathbf{n}) = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}(P)$ es consistente con el primer postulado de Cauchy (ver Observación 4-3) y que el segundo postulado (Observación 4-5) se cumple a partir de:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{t}(P,\mathbf{n}) &= \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\\ \mathbf{t}(P,-\mathbf{n}) &= -\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{t}(P,\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(P,-\mathbf{n})$$

Observación 4-9

De acuerdo con las expresiones (4.18) y (4.21) la construcción del tensor de tensiones de Cauchy se realiza a partir de los vectores de tracción según tres planos coordenados que pasan por el punto P (ver Figura 4-12). Sin embargo mediante la ecuación (4.20), se observa que en dicho tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}(P)$ se encuentra la información sobre los vectores de tracción correspondientes a *cualquier plano* (identificado por su normal $\mathbf{n}$ *) que pase por dicho punto.*

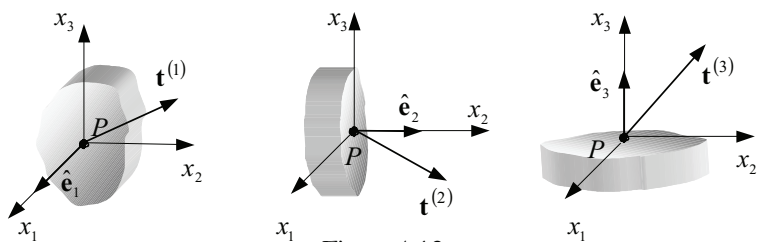


Figura 4-12

4.3.3 Representación gráfica del estado tensional en un punto

Es frecuente acudir a representaciones gráficas del tensor de tensiones basadas en paralelepípedos elementales alrededor de la partícula considerada, con caras orientadas según los tres planos coordenados, y en la que los correspondientes vectores de tracción se descomponen vectorialmente en sus componentes normal y tangencial al plano de acuerdo con las expresiones (4.15) a (4.20) (ver Figura 4-13)

4.3.3.1 Notación científica

La representación de la Figura 4-13 corresponde a lo que se conoce como *notación científica*. En dicha notación la matriz de componentes del tensor de tensiones se escribe:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix} \tag{4.22}$$

y cada componente σ_{ij} puede caracterizarse en función de sus subíndices como:

$$\sigma_{ij} \rightarrow \begin{cases} \text{índice } i \rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{indica el plano de actuación} \\ \text{(plano perpendicular al eje } x_i\text{)} \end{array} \right. \\ \text{índice } j \rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{indica la dirección de la tensión} \\ \text{(dirección del eje } x_j\text{)} \end{array} \right. \end{cases} \tag{4.23}$$

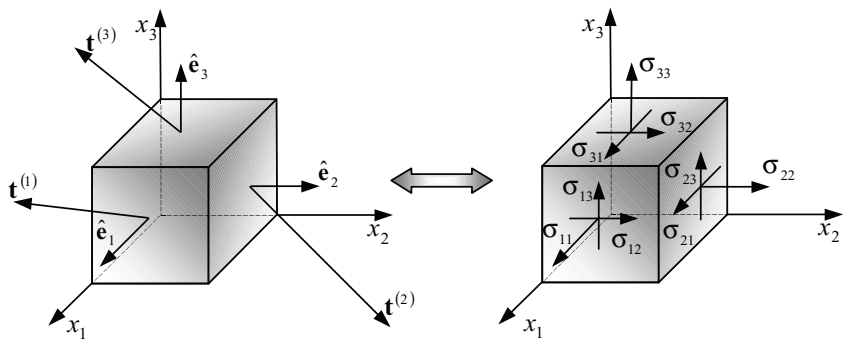


Figura 4-13 – Representación gráfica del tensor de tensiones (notación científica)

4.3.3.2 Notación ingenieril

En notación ingenieril, las componentes del tensor de tensiones de Cauchy se escriben (ver Figura 4-14):

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

$$\begin{cases} \sigma_a \rightarrow \text{Tensión } \textit{normal} \text{ actuante sobre el plano perpendicular al eje } a \\ \tau_{ab} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Tensión } \textit{tangencial} \text{ actuante sobre el plano perpendicular al eje } a \\ \text{en la dirección del eje } b \end{array} \right. \end{cases} \tag{4.25}$$

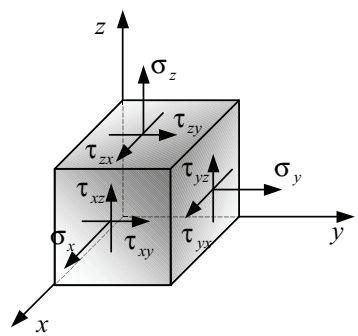
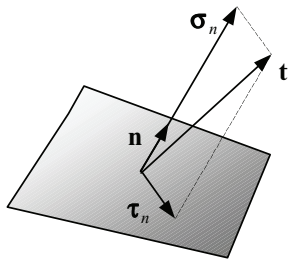


Figura 4-14 - Representación gráfica del tensor de tensiones (notación ingenieril)

4.3.3.3 Criterio de signos

Consideremos un partícula P del medio continuo y un plano de normal **n** que pase por (ver Figura 4-15). El correspondiente vector de tracción **t** puede descomponerse en sus componentes normal $\boldsymbol{\sigma}_n$ y tangencial $\boldsymbol{\tau}_n$. El signo de la proyección de **t** sobre **n** ($\sigma = \mathbf{t}\cdot\mathbf{n}$) define el carácter de *tracción* ($\boldsymbol{\sigma}_n$ tiende a *traccionar* al plano) o *compresión* ($\boldsymbol{\sigma}_n$ tiende a *comprimir* al plano) de la componente normal.



$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma\,\mathbf{n}$$

$$\sigma = \mathbf{t}\cdot\mathbf{n}\begin{cases} > 0 \text{ tracción} \\ < 0 \text{ compresión} \end{cases}$$

Figura 4-15– Descomposición del vector de tracción

Este concepto puede utilizarse para definir el signo de las componentes del tensor de tensiones. A estos efectos en el paralelepípedo elemental de la Figura 4-13 se distingue entre *caras vistas* o positivas (cuya normal hacia fuera va en la dirección positiva del vector de la base y que *se ven* en la figura) y las restantes caras o *caras ocultas* o negativas.

El criterio de signos para las caras vistas es el siguiente:

Tensiones normales $\sigma_{ij}\ o\ \sigma_a \begin{cases} positivas\ (+) \Rightarrow \text{tracción} \\ negativas\ (-) \Rightarrow \text{compresión} \end{cases}$

Tensiones tangenciales $\tau_{ab} \begin{cases} positivas\ (+) \Rightarrow \text{sentido del eje b} \\ negativas\ (-) \Rightarrow \text{sentido contrario al eje b} \end{cases}$

NOTA

Es evidente que valores negativos de las componentes del tensor de tensiones redundarán en representaciones gráficas de signo opuesto al de los valores positivos indicados en las figuras.

De acuerdo con estos criterios los sentidos de las tensiones representados en la Figura 4-14 (sobre las caras vistas del paralelepípedo) corresponden a valores positivos de las respectivas componentes del tensor de tensiones.

En virtud del principio de acción y reacción ($\mathbf{t}(P,\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(P,-\mathbf{n})$) y para las caras ocultas del paralelepípedo, dichos valores positivos de los componentes del tensor de tensiones suponen sentidos contrarios para su correspondiente representación gráfica (ver Figura 4-16).

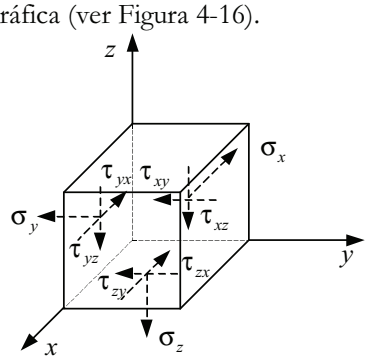


Figura 4-16 – Tensiones positivas en los planos ocultos

4.4 Propiedades del tensor de tensiones

Consideremos un volumen material arbitrario V de un medio continuo y sea ∂V el contorno de este volumen material. Sean $\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$ las fuerzas másicas que actúan en V y sea $\mathbf{t}^*(\mathbf{x},t)$ el vector de tracción prescrito que actúa sobre el contorno ∂V. Sean, finalmente, $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$ el campo vectorial de aceleraciones de las partículas y $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$ el campo tensorial de tensiones de Cauchy (ver Figura 4-17).

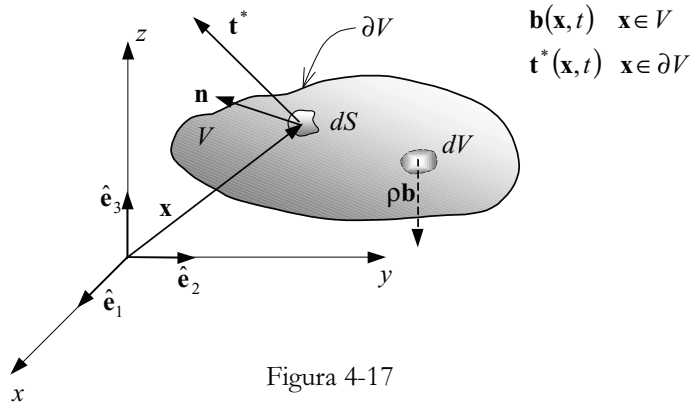


Figura 4-17

4.4.1 Ecuación de Cauchy. Ecuación de equilibrio interno

El tensor de tensiones, las fuerza másicas y las aceleraciones están relacionadas por la denominada *Ecuación de Cauchy:*

$$\text{Ecuación de Cauchy} \rightarrow \begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\,\mathbf{b}=\rho\,\mathbf{a} & \forall\mathbf{x}\in V \\ \dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}+\rho b_j=\rho a_j & i,j\in\{1,2,3\} \end{cases} \tag{4.26}$$

cuya expresión explícita en notación ingenieril resulta:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+\rho b_x=\rho a_x \\ \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\rho b_y=\rho a_y \\ \dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\rho b_z=\rho a_z \end{cases} \tag{4.27}$$

Si el sistema está en equilibrio la aceleración es nula ($\mathbf{a}=\mathbf{0}$), la expresión (4.26) queda:

$$\text{Ecuación de equilibrio interno} \rightarrow \begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\,\mathbf{b}=\mathbf{0} & \forall\mathbf{x}\in V \\ \dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}+\rho b_j=0 & i,j\in\{1,2,3\} \end{cases} \tag{4.28}$$

que se conoce como la *Ecuación de equilibrio interno* del medio continuo.

La deducción de las ecuaciones de Cauchy se hace a partir *del Postulado de balance de la cantidad de movimien*to que es objeto de estudio en el capítulo 5.

4.4.2 Ecuación de equilibrio en el contorno

La ecuación (4.20) puede ser ahora aplicada a los puntos del contorno considerando que el vector de tracción es ahora conocido en dichos puntos ($\mathbf{t}=\mathbf{t}^*$). El resultado es la denominada *ecuación de equilibrio en el contorno*:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ecuación de equilibrio}\\ \text{en el contorno}\end{array}\rightarrow\begin{cases}\mathbf{n}(\mathbf{x},t)\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)=\mathbf{t}^*(\mathbf{x},t) & \forall\mathbf{x}\in\partial V\\ n_i\,\sigma_{ij}=t_j^* \qquad i,j\in\{1,2,3\}\end{cases}} \tag{4.29}$$

4.4.3 Simetría del tensor de tensiones de Cauchy

Mediante la aplicación del principio de balance del momento angular (ver capítulo 5) puede demostrarse que el tensor de tensiones de Cauchy es *simétrico:*

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^T\\ &\sigma_{ij}=\sigma_{ji}\qquad i,j\in\{1,2,3\}\end{aligned} \tag{4.30}$$

Observación 4-10

La simetría del tensor de tensiones permite que las ecuaciones de Cauchy (4.28) y de equilibrio en el contorno (4.29) puedan escribirse, respectivamente, como:

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\,\mathbf{b}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla+\rho\,\mathbf{b}=\rho\,\mathbf{a} & \forall\mathbf{x}\in V\\ \dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}+\rho b_j=\dfrac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_i}+\rho b_j=\rho a_j & i,j\in\{1,2,3\}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{t}^*(\mathbf{x},t) & \forall\mathbf{x}\in\partial V\\ n_i\,\sigma_{ij}=\sigma_{ji}\,n_i=t_j^*(\mathbf{x},t) & \forall\mathbf{x}\in\partial V\qquad i,j\in\{1,2,3\}\end{cases}$$

Ejemplo 4-2 – *Un medio continuo se mueve con un campo de velocidades cuya descripción espacial es* $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=[\mathrm{z},\quad \mathrm{x},\quad \mathrm{y}]^{\mathrm{T}}$. *El tensor de tensiones de Cauchy es de la forma:*

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\mathrm{y} & \mathrm{g(x,z,t)} & 0\\ \mathrm{h(y)} & \mathrm{z(1+t)} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Determinar las funciones g, h y la forma espacial de las fuerzas de volumen $\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$ *que generan el movimiento.*

Resolución:
Sabemos que el tensor de tensiones es simétrico, por lo tanto:

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^T \quad\Rightarrow\quad h(y)=g(x,z,t) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}h(y)=C\\ g(x,z,t)=C\end{cases}$$

donde C es una constante.

Además la divergencia del tensor resulta ser nula:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y & C & 0\\ C & z(1+t) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

por lo tanto, la ecuación de Cauchy quedará:

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{b}&=\rho\mathbf{a}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}&=\mathbf{0}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad\mathbf{b}=\mathbf{a}$$

y aplicando la fórmula de la derivada material de la velocidad:

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\qquad\qquad\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=0$$

$$\nabla\mathbf{v}=\nabla\otimes\mathbf{v}\equiv\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z & x & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}=\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}=\begin{bmatrix}z & x & y\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y & z & x\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\Rightarrow\quad\mathbf{b}(\mathbf{x},t)=\mathbf{a}(\mathbf{x},t)\equiv\begin{bmatrix}y & z & x\end{bmatrix}^T}$$

4.4.4 Diagonalización. Tensiones y direcciones principales

RECORDATORIO

Un teorema del álgebra tensorial garantiza que todo tensor de segundo orden simétrico diagonaliza en una base ortonormal y sus valores propios son reales.

Consideremos el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$. Al tratarse de un tensor de segundo orden simétrico diagonaliza en una base ortonormal y sus autovalores son reales. Consideremos, pues, su matriz de componentes en la base cartesiana (x,y,z) de trabajo (ver Figura 4-18):

$$\boldsymbol{\sigma}\equiv\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{bmatrix}_{(x,y,z)}\tag{4.31}$$

En el sistema cartesiano (x',y',z') en el que $\boldsymbol{\sigma}$ diagonaliza su matriz de componentes será:

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{bmatrix}_{(x',y',z')}\tag{4.32}$$

Definiciones:

Direcciones principales (de tensión): Las direcciones, asociadas a los ejes (x',y',z'), en las que el tensor de tensiones diagonaliza.

Tensiones principales: Los valores propios del tensor de tensiones $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$. En general, se supondrán ordenadas de la forma $\{\sigma_1\geq\sigma_2\geq\sigma_3\}$.

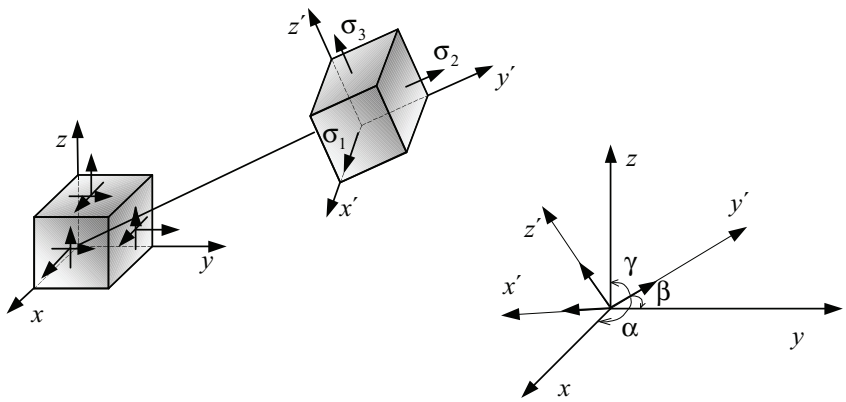


Figura 4-18 – Diagonalización del tensor de tensiones

Para obtener las direcciones y tensiones principales, se debe plantear el problema de autovalores asociado al tensor $\boldsymbol{\sigma}$. Es decir, si λ y $\mathbf{v}$ son un autovalor y su correspondiente autovector, respectivamente, se plantea:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}\Rightarrow\left[\boldsymbol{\sigma}-\lambda\mathbf{1}\right]\cdot\mathbf{v}=\mathbf{0} \tag{4.33}$$

Para que la solución de este sistema sea no trivial (distinta de $\mathbf{v}=0$), el determinante de (4.33) tiene que ser igual a cero, es decir:

$$\det\left[\boldsymbol{\sigma}-\lambda\mathbf{1}\right]\overset{\text{not}}{=}\left|\boldsymbol{\sigma}-\lambda\mathbf{1}\right|=0 \tag{4.34}$$

La ecuación (4.34) es una ecuación polinómica de tercer grado en λ. Siendo el tensor $\boldsymbol{\sigma}$ simétrico, sus tres soluciones $(\lambda_1\equiv\sigma_1,\lambda_2\equiv\sigma_2,\lambda_3\equiv\sigma_3)$ son reales. Una vez hallado los autovalores y ordenados según el criterio $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\sigma_3$, se puede obtener el vector propio $\mathbf{v}^{(i)}$ para cada tensión σ_i, resolviendo el sistema (4.33):

$$\left[\boldsymbol{\sigma}-\sigma_i\mathbf{1}\right]\cdot\mathbf{v}^{(i)}=\mathbf{0}\qquad i\in\{1,2,3\} \tag{4.35}$$

que proporciona una solución no trivial para los autovectores $\mathbf{v}^{(i)}$, ortogonales entre sí, la cual, una vez normalizada, define los tres elementos de la base correspondientes a las tres direcciones principales.

Observación 4-11

De acuerdo con la interpretación gráfica de las componentes del tensor de tensiones del apartado 4.3.3, sobre las caras del paralelepípedo elemental asociado a las direcciones principales de tensión no actúan más que unas tensiones normales que son, precisamente, las tensiones principales (ver Figura 4-18).

4.4.5 Tensión media y presión media

Definición:

Tensión media: Es el valor medio de las tensiones principales

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Observando la matriz de componentes del tensor de tensiones en las direcciones principales (4.32), resulta:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} Tr(\boldsymbol{\sigma}) \tag{4.36}$$

Definición:

Presión media: Es la tensión media cambiada de signo

$$\text{presión media} \overset{\text{not}}{=} \bar{p} = -\sigma_m = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Definición:

Estado de tensión hidrostático: Es aquel en el que las tres tensiones principales son iguales:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \quad \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} = \sigma \mathbf{1}$$

NOTA

Se define como *tensor isótropo* a aquel que es invariante frente a cualquier cambio de base ortogonal. La expresión más general de un tensor isótropo de segundo orden es $\mathbf{T} = \alpha \mathbf{1}$ siendo α un escalar cualquiera.

Observación 4-12

Un estado de tensión hidrostático implica que el tensor de tensiones es isótropo y, por tanto, que su matriz de componentes es la misma en cualquier sistema de coordenadas cartesianas.

En consecuencia, cualquier dirección es dirección principal y el estado tensional (vector de tracción) es el mismo para cualquier plano.

4.4.6 Descomposición del tensor de tensiones en sus partes esférica y desviadora

El tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ puede descomponerse en una parte (o componente) esférica $\boldsymbol{\sigma}_{esf}$ y una parte desviadora $\boldsymbol{\sigma}'$:

NOTA

Este tipo de descomposición puede hacerse con cualquier tensor de segundo orden.

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{esf}}_{\substack{Parte \\ esférica}} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}'}_{\substack{Parte \\ desviadora}} \tag{4.37}$$

donde la parte esférica se define como:

$$\boldsymbol{\sigma}_{esf} :\overset{def}{=} \frac{1}{3} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} = \sigma_m \mathbf{1} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

donde σ_m es la tensión media definida en (4.36). Por la definición (4.37) la parte (o componente) desviadora del tensor de tensiones será:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{esf} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

resultando:

$$\boldsymbol{\sigma}' \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_z \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

Observación 4-13

La parte esférica del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}_{esf}$ es un tensor isótropo (y define un estado tensional hidrostático) y por lo tanto es invariante frente a un cambio de base ortogonal.

Observación 4-14

La componente desviadora del tensor es un *indicador* de cuanto se aparta el estado tensional de uno hidrostático (ver ecuación (4.39) y la Observación 4-13).

Observación 4-15

Las direcciones principales del tensor de tensiones y de su componente desviadora coinciden. La demostración es trivial teniendo en cuenta que, de la Observación 4-13, la parte esférica $\boldsymbol{\sigma}_{esf}$ es diagonal en cualquier sistema de coordenadas. En consecuencia, en la ecuación (4.39), si $\boldsymbol{\sigma}$ diagonaliza en una cierta base, también lo hace $\boldsymbol{\sigma}'$.

Observación 4-16
La traza del tensor (componente) desviador es nula. Teniendo en cuenta las ecuaciones (4.36) y (4.39):

$$Tr(\boldsymbol{\sigma}') = Tr(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{esf}) = Tr(\boldsymbol{\sigma}) - Tr(\boldsymbol{\sigma}_{esf}) = 3\sigma_m - 3\sigma_m = 0$$

4.4.7 Invariantes tensoriales

RECORDATORIO
Los invariantes tensoriales son combinaciones algebraicas escalares de las componentes de un tensor, que no cambian al cambiar la base.

Los tres invariantes fundamentales del tensor de tensiones (*o invariantes I*) son:

$$I_1 = Tr(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{ii} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \tag{4.41}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} - I_1^2\right) = -\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right) \tag{4.42}$$

$$I_3 = \det(\boldsymbol{\sigma}) \tag{4.43}$$

Cualquier combinación de los invariantes I es a su vez otro invariante. Así se definen los siguientes *invariantes* J:

$$J_1 = I_1 = \sigma_{ii} \tag{4.44}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\left(I_1^2 + 2I_2\right) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ji} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}\right) \tag{4.45}$$

$$J_3 = \frac{1}{3}\left(I_1^3 + 3I_1 I_2 + 3I_3\right) = \frac{1}{3}Tr\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} \tag{4.46}$$

Observación 4-17
Para un tensor puramente desviador $\boldsymbol{\sigma}'$ los correspondientes *invariantes* J resultan ser (ver Observación 4-16 y las ecuaciones (4.41) a (4.46)):

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= I_1 = 0 \\ J_2 &= I_2 \\ J_3 &= I_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}' \Rightarrow \begin{cases} J_1' = I_1' = 0 \\ J_2' = I_2' = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'\right) = \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ji} \\ J_3' = I'_3 = \frac{1}{3}\left(\sigma'_{ij}\sigma'_{jk}\sigma'_{ki}\right) \end{cases}$$

4.5 Tensor de tensiones en coordenadas curvilíneas ortogonales

NOTA

Son aplicables aquí los mismos conceptos y nociones respecto a sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales, explicados en el apartado 2.15 del capítulo 2.

4.5.1 Coordenadas cilíndricas

Consideremos un punto en el espacio definido por las coordenadas cilíndricas $\{r,\theta,z\}$ (ver Figura 4-19):

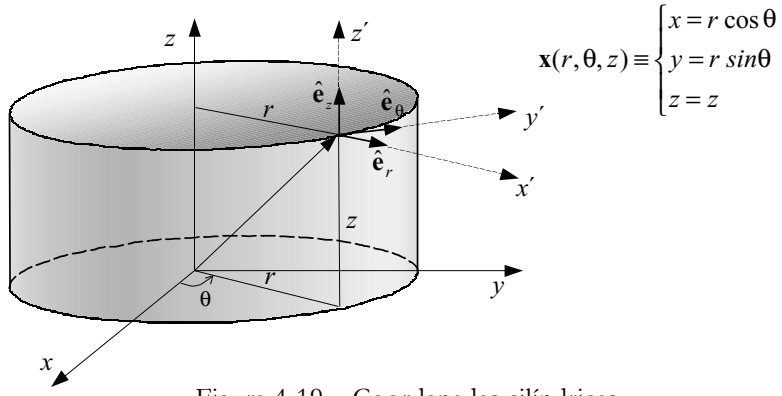


Figura 4-19 – Coordenadas cilíndricas

En dicho punto consideraremos la base física (ortonormal) $\{\hat{\mathbf{e}}_r,\hat{\mathbf{e}}_\theta,\hat{\mathbf{e}}_z\}$ y un sistema cartesiano de ejes locales $\{x',y',z'\}$ definido dextrógiro. En esta base las componentes del tensor de tensiones son:

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'}\\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'}\\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz}\\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z}\\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_z\end{bmatrix} \tag{4.47}$$

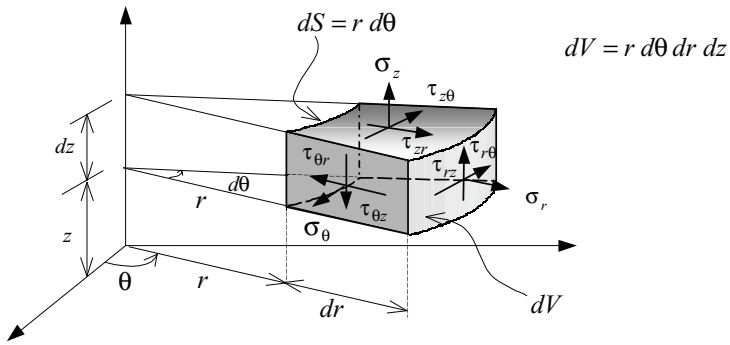


Figura 4-20– Elemento diferencial en coordenadas cilíndricas

cuya representación gráfica sobre un paralelepípedo elemental puede verse en la Figura 4-20, donde se han dibujado las componentes del tensor de tensiones en las caras vistas. Nótese que, ahora, las caras vistas en la figura no coinciden con las caras positivas, definidas (en el mismo sentido que en el apartado 4.3.3.3) como aquellas cuya normal coincide (en dirección y sentido) con un vector de la base física.

4.5.2 Coordenadas esféricas

Un punto en el espacio está definido por las coordenadas esféricas $\{r,\theta,\phi\}$ (ver Figura 4-21).

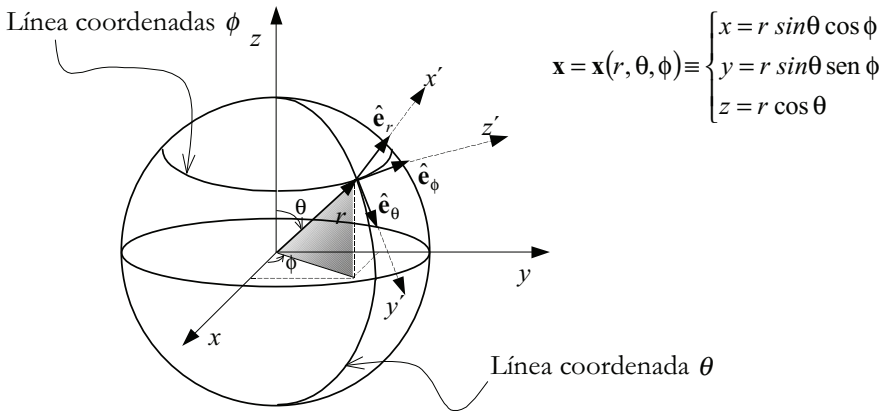


Figura 4-21– Coordenadas esféricas

Para cada punto consideraremos la base física (ortonormal) $\{\hat{\mathbf{e}}_r,\hat{\mathbf{e}}_\theta,\hat{\mathbf{e}}_\phi\}$ y un sistema de ejes locales cartesiano $\{x',y',z'\}$ definido dextrógiro. En esta base las componentes del tensor de tensiones son:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{r\phi} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta\phi} \\ \tau_{r\phi} & \tau_{\phi\theta} & \sigma_\phi \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

La representación gráfica de las componentes del tensor de tensiones en coordenadas esféricas puede verse en la Figura 4-22, donde se han dibujado las componentes del tensor de tensiones en las caras vistas.

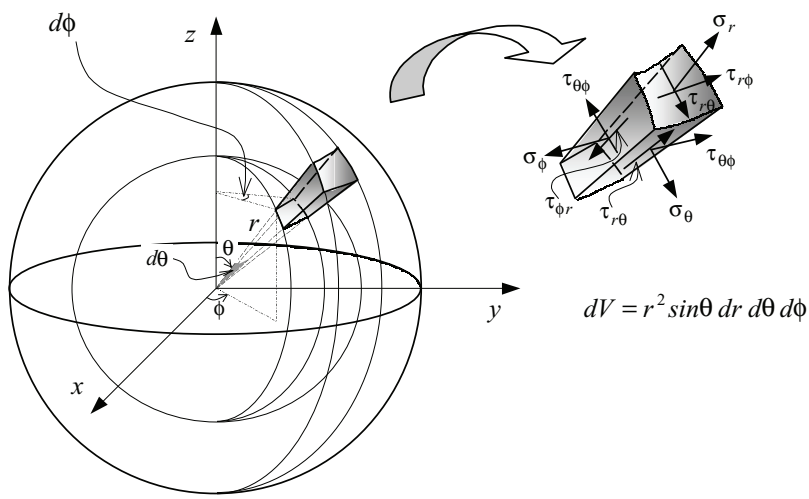


Figura 4-22 – Elemento diferencial en coordenadas esféricas

4.6 Círculo de Mohr en 3 dimensiones

4.6.1 Interpretación gráfica de estados tensionales

El tensor de tensiones juega un papel tan crucial en la ingeniería que, tradicionalmente, se han desarrollado diversos procedimientos, esencialmente gráficos, para su visualización e interpretación. Los más comunes son los denominados *Círculos de Mohr*.

Sea P un punto arbitrario de un medio continuo y sea $\boldsymbol{\sigma}(P)$ el tensor de tensiones en dicho punto. Consideremos un plano arbitrario, con normal unitaria $\mathbf{n}$, que pasa por P (ver Figura 4-23). El vector de tracción en el punto P correspondiente a dicho plano es $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$. Podemos descomponer ahora dicho vector en sus componentes $\boldsymbol{\sigma}_n$, normal al plano considerado, y la componente $\boldsymbol{\tau}_n$ tangente a dicho plano.

Consideremos ahora la componente normal $\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma \mathbf{n}$, donde σ es la componente normal de la tensión sobre el plano, definida de acuerdo con el criterio de signos del apartado 4.3.3.3:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma \cdot \mathbf{n} \qquad \begin{cases} \sigma > 0 \text{ tracción} \\ \sigma < 0 \text{ compresión} \end{cases} \tag{4.49}$$

Consideremos ahora la componente tangencial $\boldsymbol{\tau}_n$, de la que sólo nos va a interesar su módulo:

$$\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma}_n \qquad |\boldsymbol{\tau}_n| = \tau \geq 0 \tag{4.50}$$

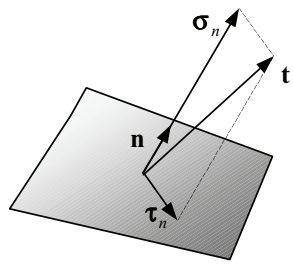


Figura 4-23 – Descomposición del vector de tracción

Podemos caracterizar ahora el estado tensional en el punto considerado sobre el plano de normal $\mathbf{n}$ mediante la pareja:

$$(\sigma, \tau) \rightarrow \begin{cases} \sigma \in \mathbb{R} \\ \tau \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \tag{4.51}$$

que, a su vez, determina un punto del semiplano $(x \equiv \sigma,\ y \equiv \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ de la Figura 4-24. Si consideramos ahora los infinitos planos que pasan por el punto P (caracterizados por todas las posibles normales $\mathbf{n}_{(i)}$) y obtenemos los correspondientes valores de la tensión normal σ_i y tangencial τ_i y, finalmente, los representamos en el semiespacio mencionado, obtendremos una nube de puntos de la que podemos preguntarnos si ocupa todo el semiespacio o *está limitada a un lugar geométrico determinado*. La repuesta a dicha pregunta la proporciona el análisis que sigue.

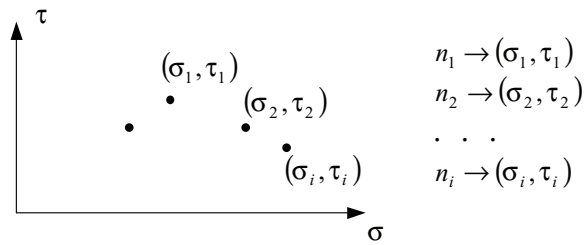


Figura 4-24 – Lugar geométrico de los puntos (σ,τ)

4.6.2 Determinación de los círculos de Mohr

Consideremos el sistema de ejes cartesianos asociado a las direcciones principales del tensor de tensiones. En esta base, las componentes del tensor serán:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \text{ con } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \tag{4.52}$$

y el vector de tracción tendrá por componentes

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

donde n_1, n_2, n_3 son las componentes de la normal $\mathbf{n}$ en la base asociada a las direcciones principales. A la vista de la ecuación (4.53) la componente normal de la tensión (σ), definida en la ecuación (4.49), y el módulo del vector de tracción serán, respectivamente:

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 n_1, & \sigma_2 n_2, & \sigma_3 n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \boxed{\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \sigma} \tag{4.54}$$

$$|\mathbf{t}|^2 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \tag{4.55}$$

También podemos relacionar los módulos del vector de tracción y de sus componentes normal y tangencial mediante:

$$|\mathbf{t}|^2 = \boxed{\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \sigma^2 + \tau^2} \tag{4.56}$$

donde se ha tenido en cuenta la expresión (4.55). Finalmente, la condición de normal unitaria de $\mathbf{n}$ se puede expresar en función de sus componentes como:

$$|\mathbf{n}| = 1 \Rightarrow \boxed{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1} \tag{4.57}$$

Las ecuaciones (4.56), (4.54) y (4.57) se pueden sintetizar en la siguiente ecuación matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma^2 + \tau^2 \\ \sigma \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{4.58}$$

El sistema (4.58) puede ser interpretado como un sistema lineal con:

a) Una matriz de coeficientes, $\mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma})$, definida por el tensor de tensiones en el punto P (a través de las tensiones principales).
b) Un término independiente, $\mathbf{b}$, definido por las coordenadas de un cierto punto en el semiespacio $\sigma - \tau$ (representativas a su vez del estado tensional sobre un cierto plano)
c) Un vector de incógnitas $\mathbf{x}$ que determina (mediante las componentes de la normal $\mathbf{n}$) a qué plano corresponden los valores de σ y τ elegidos.

Observación 4-18
En principio solo serán factibles las soluciones del sistema (4.58) cuyas componentes $\mathbf{x} \equiv \left[n_1^2, n_2^2, n_3^2\right]^T$ sean positivas y menores que 1 (ver ecuación (4.57)). $\Rightarrow \begin{cases} 0 \le n_1^2 \le 1 \\ 0 \le n_2^2 \le 1 \\ 0 \le n_3^2 \le 1 \end{cases}$

Toda pareja (σ, τ) que conduzca a una solución $\mathbf{x}$ que cumpla este requisito será considerado un *punto factible* del semiespacio $\sigma - \tau$, el cual *es representativo del estado tensional sobre un plano que pasa por P*. El lugar geométrico de los puntos (σ, τ) factibles es la denominada *región factible* del semiespacio $\sigma - \tau$.

Consideremos ahora el objetivo de encontrar la región factible. Mediante algunas operaciones algebraicas, el sistema (4.58) puede ser reescrito como:

$$\begin{cases} (I) \ \rightarrow \sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_1 + \sigma_3)\sigma + \sigma_1\sigma_3 - \dfrac{A}{(\sigma_1 - \sigma_3)} n_1^2 = 0 \\ (II) \rightarrow \sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_2 + \sigma_3)\sigma + \sigma_2\sigma_3 - \dfrac{A}{(\sigma_2 - \sigma_3)} n_2^2 = 0 \\ (III) \rightarrow \sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)\sigma + \sigma_1\sigma_2 - \dfrac{A}{(\sigma_1 - \sigma_2)} n_3^2 = 0 \end{cases} \tag{4.59}$$
$$A = (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_3)$$

Consideremos ahora, por ejemplo, la ecuación (III) del sistema (4.59). Es fácil comprobar que puede escribirse como:

$$(\sigma - a)^2 + \tau^2 = R^2$$
$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \\ R = \sqrt{\dfrac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_3) n_3^2} \end{cases} \tag{4.60}$$

que corresponde a la ecuación de una semicircunferencia en el semiespacio $\sigma - \tau$ de centro C_3 y radio R_3:

$$\begin{aligned} C_3 &= \left(\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), 0 \right) \\ R_3 &= \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_3) n_3^2} \end{aligned} \tag{4.61}$$

Los distintos valores de $n_3^2 \in [0,1]$ determinarán un conjunto de semicircunferencias concéntricas de centro C_3 y radios $R_3(n_3)$ en el semiespacio $\sigma - \tau$, cuyos puntos ocuparán una cierta región del mismo. Dicha región vendrá delimitada por los valores máximo y mínimo de $R_3(n_3)$. Observando que el radical de la expresión de R_3 en (4.61) es positivo, estos valores se obtendrán para $n_3^2 = 0$ (el radio mínimo) y $n_3^2 = 1$ (el radio máximo)

$$\begin{aligned} n_3^2 = 0 \;&\Rightarrow\; R_3^{\text{mín}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \\ n_3^2 = 1 \;&\Rightarrow\; R_3^{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 \end{aligned} \tag{4.62}$$

El dominio delimitado por ambas semicircunferencias definirá una primera limitación del dominio factible al indicado en la Figura 4-25.

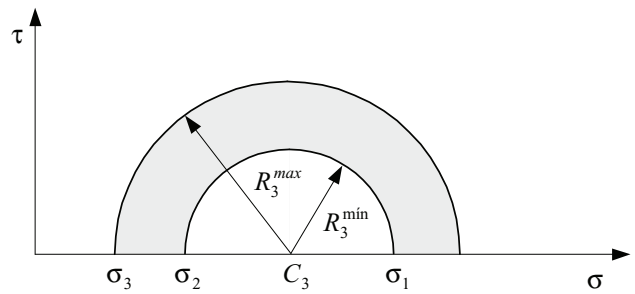


Figura 4-25 – Primera limitación del dominio factible

El proceso puede ser ahora repetido para las otras dos ecuaciones (I) y (II) de (4.59) obteniéndose los siguientes resultados:

- Ecuación (*I*) : $C_1 = \left(\underbrace{\frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)}_{a_1}, 0 \right) \Rightarrow \begin{cases} R_1^{\text{mín}} = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \\ R_1^{max} = |\sigma_1 - a_1| \end{cases}$

- Ecuación (*II*) : $C_2 = \left(\underbrace{\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)}_{a_2}, 0 \right) \Rightarrow \begin{cases} R_2^{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \\ R_2^{\text{mín}} = |\sigma_2 - a_2| \end{cases}$

- Ecuación (*III*): $C_3 = \left(\underbrace{\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)}_{a_3}, 0 \right) \Rightarrow \begin{cases} R_3^{\text{mín}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \\ R_3^{max} = |\sigma_3 - a_3| \end{cases}$

Para cada caso se tiene, como región factible, una semi-corona definida por los radios mínimo y máximo. Evidentemente la región factible final tiene que estar en la intersección de dichas semi-coronas tal como se indica en la Figura 4-26).

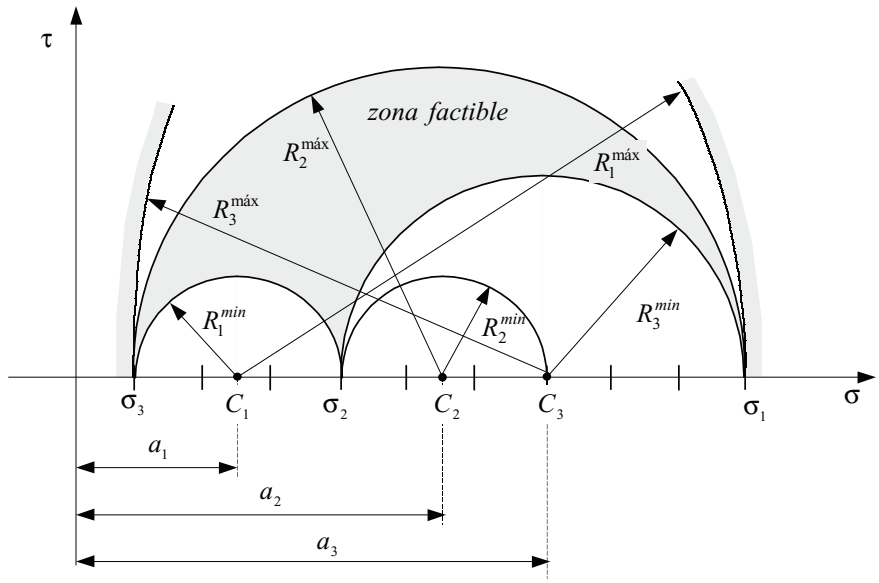


Figura 4-26 – Zona factible

En la Figura 4-27 se muestra la construcción final resultante de los tres semi-círculos de Mohr pasando por los puntos σ_1, σ_2 y σ_3.

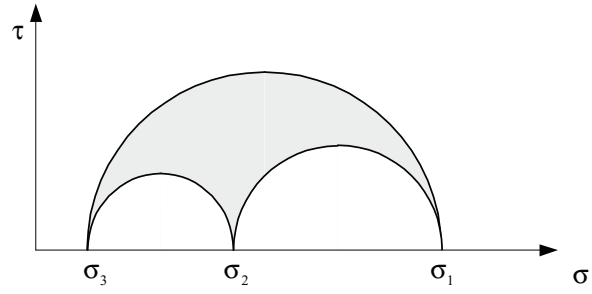


Figura 4-27– Círculos de Mohr en tres dimensiones

Puede demostrarse, además, que todo punto del interior del dominio encerrado por los círculos de Mohr es factible (en el sentido de que los correspondientes valores de σ y τ corresponden a estados tensionales sobre un cierto plano que pasa por el punto P).

La construcción del círculo de Mohr es trivial (una vez conocidas las tres tensiones principales) y resulta de utilidad para discriminar posibles estados tensionales sobre planos, determinar valores máximos de las tensiones tangenciales etc.

Ejemplo 4-3 – *Las tensiones principales en un cierto punto de un medio continuo son:*

$$\sigma_1=10 \;\; ; \;\; \sigma_2 = 5 \;\; ; \;\; \sigma_3 = 2$$

En un cierto plano, que pasa por dicho punto, las tensiones normal y tangencial son σ *y* τ *respectivamente. Razonar si son posibles los siguientes valores de* σ *y* τ*:*

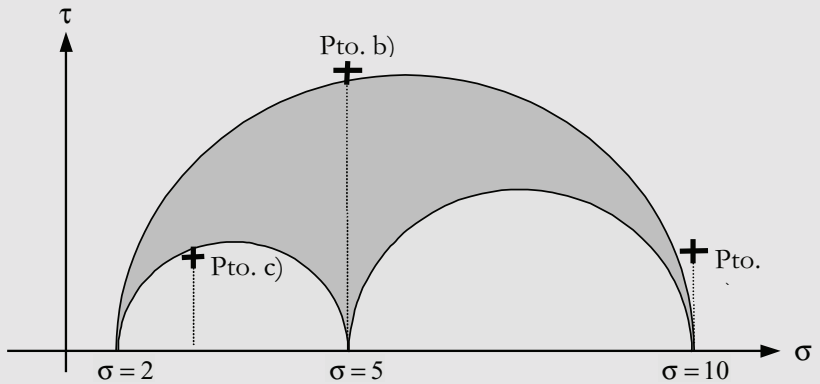
a) $\sigma = 10 \;\; ; \;\; \tau = 1$

b) $\sigma = 5 \quad ; \ \tau = 4$

c) $\sigma = 3 \quad ; \ \tau = 1$

Resolución:

Dibujando los *Círculos de Mohr* para el estado tensional que nos definen y los puntos pedidos en el semiespacio $\sigma - \tau$:



Solo en la zona sombreada es posible encontrar puntos que representen estados tensionales (puntos factibles). Se comprueba *que ninguno de los considerados puede serlo.*

4.7 Círculo de Mohr en 2 dimensiones

NOTA

Este tipo de problemas se analiza en profundidad en el capítulo 7, dedicado a la Elasticidad bidimensional.

Muchos problemas reales en ingeniería se asimilan a un estado tensional ideal bidimensional en el que se conoce (o se supone) *a priori* cuál es una de las direcciones principales de tensión. En estos casos, haciendo coincidir el eje cartesiano x_3 (o el eje z) con dicha dirección principal (ver Figura 4-28), las componentes del tensor de tensiones pueden escribirse como:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{4.63}$$

Consideremos ahora *solamente la familia de planos paralelos al eje* x_3 (por tanto, la componente n_3 de su normal es nula). El correspondiente vector de tracción tiene la expresión:

$$\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \Rightarrow \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.64}$$

y su componente t_3 se anula. En las ecuaciones (4.63) y (4.64) las componentes del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$, de la normal al plano $\mathbf{n}$ y del vector tracción $\mathbf{t}$, asociadas a la dirección x_3, o bien son conocidas (este es el caso de $\sigma_{13}, \sigma_{23}, n_3$ o t_3), o bien no intervienen en el problema (como es el caso de σ_{33}). Esta circunstancia sugiere prescindir de la tercera dimensión y reducir el

análisis a las dos dimensiones asociadas a los ejes x_1, x_2 (o x, y) como se indica en la Figura 4-28.

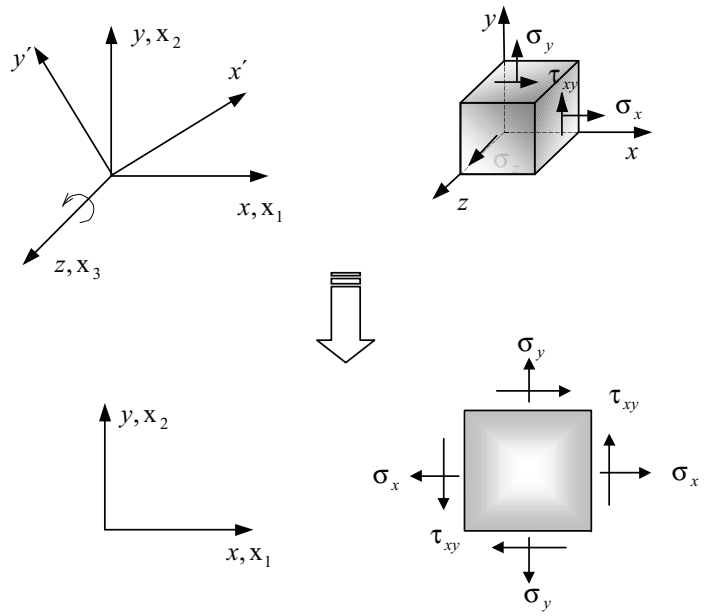


Figura 4-28 – Reducción del problema de tres a dos dimensiones

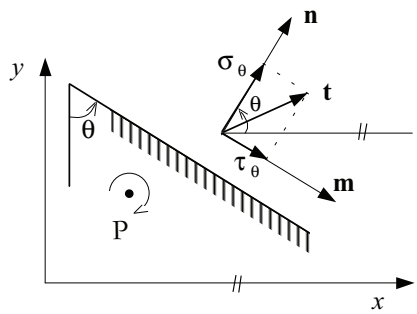
Entonces podemos definir el problema *en el plano* a partir de:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \tag{4.65}$$

$$\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \tag{4.66}$$

4.7.1 Estado tensional sobre un plano dado

Sea un plano (siempre paralelo al eje z) cuya normal unitaria $\mathbf{n}$ forma un ángulo θ con el eje $\mathbf{x}$. Se define un vector unitario $\mathbf{m}$ en la dirección *tangencial* a la traza del plano y *en el sentido indicado* en la Figura 4-29.



$$\begin{cases} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ sin\theta \end{bmatrix} \\ \mathbf{m} = \begin{bmatrix} sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix} \end{cases}$$

Figura 4-29 – Estado tensional sobre un plano dado

Observación 4-19

Tanto la normal $\mathbf{n}$ como el vector tangente $\mathbf{m}$ y el ángulo θ en la Figura 4-29 tienen asociados los siguientes *sentidos*:

- Vector *normal* $\mathbf{n}$: hacia el *exterior* del plano (respecto a la posición del punto P)
- Vector *tangente* $\mathbf{m}$: tiende a *girar en sentido horario* respecto al punto P.
- Angulo θ : positivo en el sentido *antihorario*.

Sea $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones en el punto con componentes en la base cartesiana:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \tag{4.67}$$

Utilizando la expresión (4.66), el vector de tracción en el punto sobre el plano considerado es:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} sin\theta \\ \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y sin\theta \end{bmatrix} \tag{4.68}$$

Se definen la *tension normal* σ_θ y la *tensión tangencial* τ_θ, sobre el plano de inclinación θ (ver Figura 4-29) como:

$$\sigma_\theta = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} sin\theta \; ; & \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta + \tau_{xy} 2 sin\theta \cos\theta + \sigma_y sin^2\theta \tag{4.69}$$

$$\tau_\theta = \mathbf{t} \cdot \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} sin\theta \; ; & \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\tau_\theta = \sigma_x \, sin\theta \cos\theta - \sigma_y sin\theta \cos\theta + \tau_{xy} \left[sin^2\theta - \cos^2\theta \right] \tag{4.70}$$

que pueden reescribirse como:

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} sin(2\theta) \\ \tau_\theta = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2} sin(2\theta) - \tau_{xy} \cos(2\theta) \end{cases} \tag{4.71}$$

NOTA

Se utilizan aquí las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\left.\begin{aligned} sin(2\theta) &= 2 sin\theta \cos\theta \\ \cos^2\theta &= \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \\ sin^2\theta &= \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \end{aligned}\right\}$$

4.7.2 Problema directo: diagonalización del tensor de tensiones.

El problema directo consiste en, conocidas las componentes del tensor de tensiones (4.67) en un cierto sistema de ejes $x - y$, obtener las direcciones y tensiones principales (ver Figura 4-30).

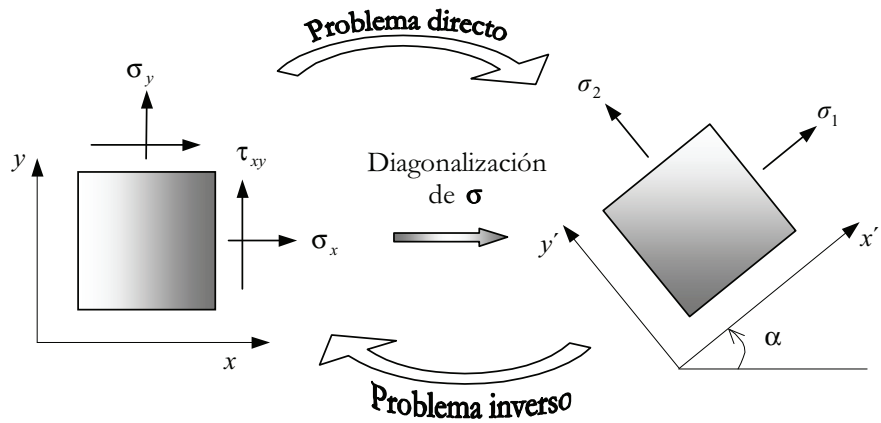


Figura 4-30 – Problema directo y problema inverso

Las direcciones principales asociadas a los ejes x' e y' definidas por los ángulos α y $\pi/2+\alpha$ (ver Figura 4-30), determinan las inclinaciones de los dos planos sobre los cuales las tensiones sólo tienen componente normal σ_α, mientras que la *componente tangencial* τ_α *se anula*. Imponiendo dicha condición en la ecuación (4.71) se obtiene:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} sin(2\alpha) - \tau_{xy}\cos(2\alpha) = 0 \;\Rightarrow$$

$$tan(2\alpha) = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}$$

$$sin(2\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\mathrm{tg}^2(2\alpha)}}} = \pm\frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^{\,2}}} \qquad (4.72)$$

$$\cos(2\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(2\alpha)}} = \pm\frac{\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^{\,2}}}$$

NOTA

La tercera dirección principal es la perpendicular al plano de análisis (eje z o x_3), ver ecuación (4.63) y Figura 4-28.

La ecuación (4.72) proporciona dos soluciones (asociadas a los signos + y -) α_1 y $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$, que definen las dos direcciones principales (ortogonales) en el plano de análisis. Las correspondientes tensiones principales se obtendrán substituyendo el ángulo $\theta = \alpha$ de la ecuación (4.72) en la ecuación (4.71) obteniéndose:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(2\alpha) + \tau_{xy} sin(2\alpha) \qquad (4.73)$$

$$\sigma_\alpha \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} \\ \sigma_2 = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} \end{cases} \tag{4.74}$$

4.7.3 Problema inverso

El problema consiste en, dadas las direcciones y tensiones principales σ_1 y σ_2 en el plano de análisis, obtener las tensiones sobre cualquier plano, caracterizado por *el ángulo* β *que forma su normal con la dirección principal correspondiente a* σ_1. Como caso particular puede obtenerse las componentes del tensor de tensiones sobre el rectángulo elemental asociado al sistema de ejes $x - y$ (ver Figura 4-30).

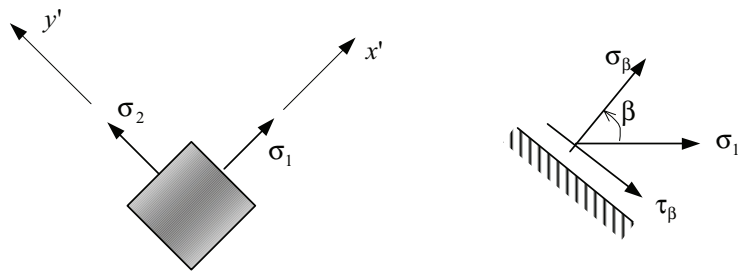


Figura 4-31- Problema inverso

Considerando ahora el sistema cartesiano $x' - y'$, asociado a las direcciones principales (ver Figura 4-31), y aplicando la ecuación (4.71) con $\sigma_{x'} = \sigma_1$, $\sigma_{y''} = \sigma_2$, $\tau_{x'y'} = 0$ y $\theta \equiv \beta$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \sigma_\beta &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos(2\beta) \\ \tau_\beta &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} sin(2\beta) \end{aligned} \tag{4.75}$$

4.7.4 Círculo de Mohr para estados planos (en dos dimensiones)

Consideremos ahora todos los posible planos que pasen por el punto P y los valores de las tensiones normal y tangencial, σ_θ y τ_θ, definidos en la ecuación (4.71) para todos los posible valores de $\theta \in [0,2\pi]$. Podemos caracterizar ahora el estado tensional en el punto sobre un plano de inclinación θ mediante la pareja:

$$(\sigma = \sigma_\theta, \tau = \tau_\theta) \rightarrow \begin{cases} \sigma \in \mathbb{R} \\ \tau \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.76}$$

que, a su vez, determina un punto $(x \equiv \sigma,\ y \equiv \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ del plano $\sigma - \tau$ de la Figura 4-32. Para determinar el lugar geométrico de los puntos de dicho plano que caracterizan todos los posibles estados tensionales, sobre planos que pasen por el punto de análisis, se procede como sigue:

Considerando un sistema de referencia que coincida con las direcciones principales (como en la Figura 4-31) y caracterizando la inclinación de los planos por el ángulo β con la tensión principal σ_1, de la ecuación (4.75) se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos(2\beta) \Rightarrow \sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos(2\beta) \\ \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} sin(2\beta) \end{aligned}\right\} \tag{4.77}$$

y elevando al cuadrado ambas ecuaciones y sumándolas, queda:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \tag{4.78}$$

Se observa que la ecuación (4.78), que será válida para cualquier valor del ángulo β, o, lo que es lo mismo, para cualquier plano de orientación arbitraria que pase por el punto, corresponde a una circunferencia con centro C y radio R en el plano $\sigma - \tau$ dados por (ver Figura 4-32):

$$C = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right) \qquad R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \tag{4.79}$$

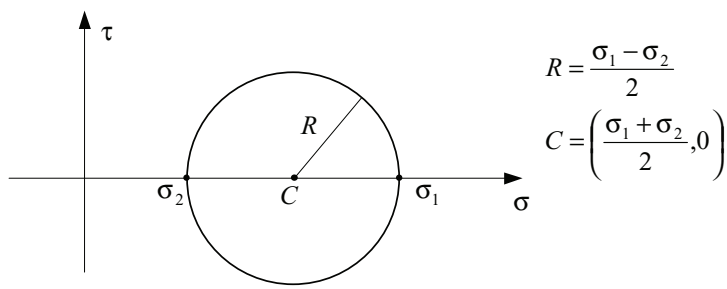


Figura 4-32 – Círculo de Mohr para estados planos

En consecuencia, el lugar geométrico de los puntos representativos del estado tensional sobre planos que pasan por P es un círculo (denominado *círculo de Mohr*), cuya construcción queda definida en la Figura 4-32.

La proposición inversa también es cierta: dado un punto del círculo de Mohr, con coordenadas (σ, τ), existe un plano que pasa por P cuyas tensiones normal y tangencial son σ y τ, respectivamente. En efecto, de la ecuación (4.77) se puede obtener:

$$\cos(2\beta) = \frac{\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)} = \frac{\sigma - a}{R} \quad ; \quad sin(2\beta) = \frac{\tau}{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)} = \frac{\tau}{R} \tag{4.80}$$

ecuaciones que definen de forma única el ángulo β de la normal a un plano (con la tensión principal σ_1) al que corresponden dichas tensiones. La Figura 4-33 proporciona, además, una interpretación del ángulo 2β sobre el propio círculo de Mohr.

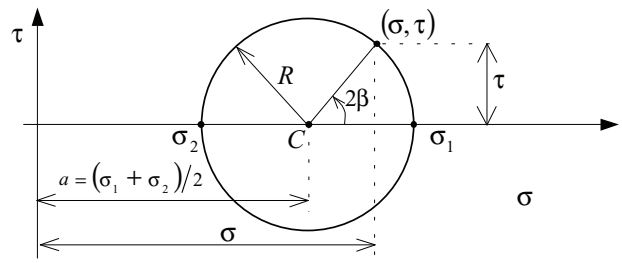


Figura 4-33 – Interpretación del ángulo β

4.7.5 Propiedades del círculo de Mohr

a) *Para obtener el punto representativo en el círculo de Mohr del estado tensional sobre un plano cuya normal forma un ángulo* β *con la dirección principal* σ_1*:*

Se parte del punto representativo del plano donde actúa la dirección principal σ_1 (punto $(\sigma_1,0)$) y se gira un ángulo 2β en el sentido que va desde σ_1 a σ_β (ver Figura 4-33 y Figura 4-34).

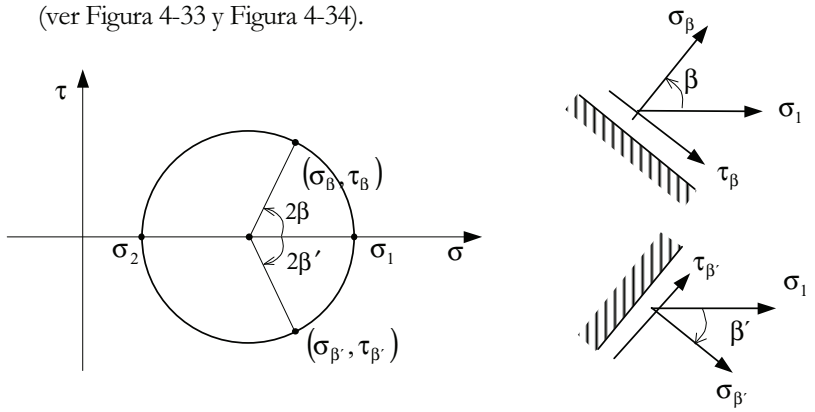


Figura 4-34

b) *Los puntos representativos en el círculo de Mohr de dos planos ortogonales están alineados con el centro del círculo* (consecuencia de la propiedad a) para $\beta_2 = \beta_1 + \frac{\pi}{2}$, ver Figura 4-35.

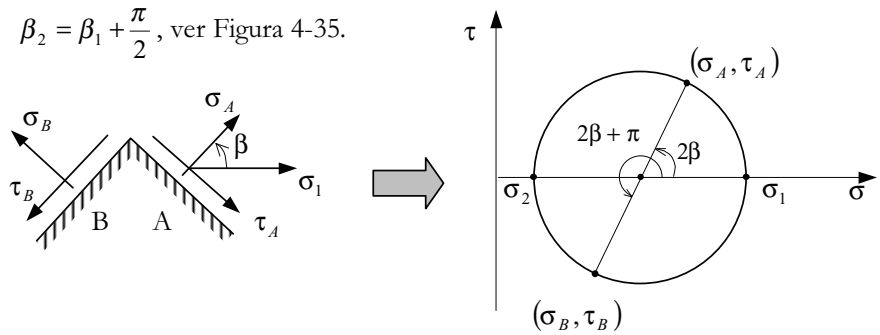


Figura 4-35

c) *Si se conoce el estado tensional en dos planos ortogonales se puede dibujar el círculo de Mohr.*

En efecto, por la propiedad b) los puntos representativos de ambos planos en el plano $\sigma - \tau$ están alineados con el centro de círculo de Mohr. En consecuencia, uniendo ambos puntos, la intersección con el eje σ proporciona el centro de círculo. Puesto que además se conocen dos puntos de círculo, puede trazarse éste.

d) *Dadas las componentes del tensor de tensiones, en una determinada base ortonormal, se puede dibujar el círculo de Mohr.*

Este es un caso particular de la propiedad c), en la que se conocen los puntos representativos del estado tensional sobre los planos cartesianos (ver Figura 4-36). Obsérvese en dicha figura cómo pueden calcularse el radio y los puntos diametrales del círculo. Obsérvese también que la aplicación de la propiedad a), para el punto representativo del plano perpendicular al eje x, supone moverse en sentido contrario al ángulo α (ángulo de σ_x con σ_1 = - ángulo de σ_1 con σ_x =- α).

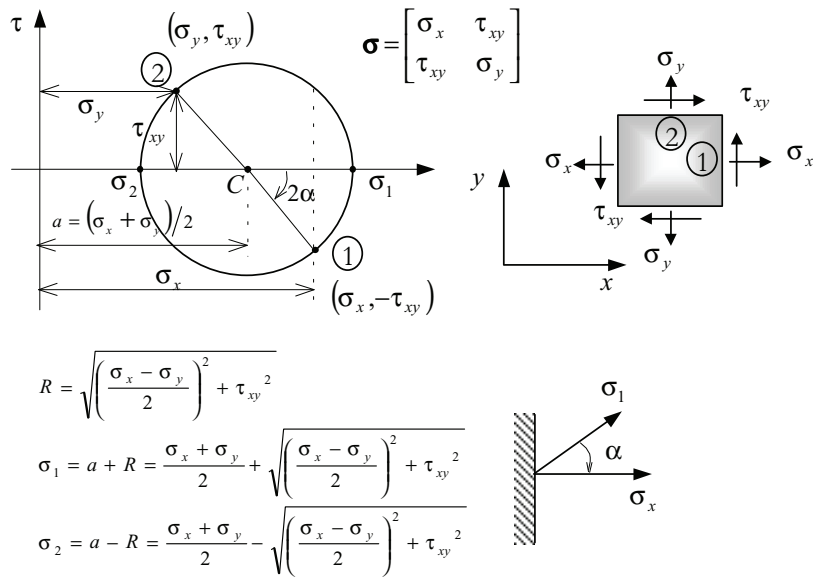


Figura 4-36

4.7.6 El Polo del círculo de Mohr

Teorema:

En el círculo de Mohr existe un punto denominado *polo* que tiene las siguientes propiedades:

- *Si se une el polo P con otro punto A del círculo de Mohr, se obtiene una recta que es paralela al plano de cuyo estado tensional es representativo el punto A* (ver Figura 4-37).
- La inversa también se verifica, es decir, *dado un plano cualquiera, si se traza por el polo P una recta paralela a dicho plano, ésta cortará al círculo de Mohr en punto B que representa al estado tensional de dicho plano* (ver Figura 4-38).

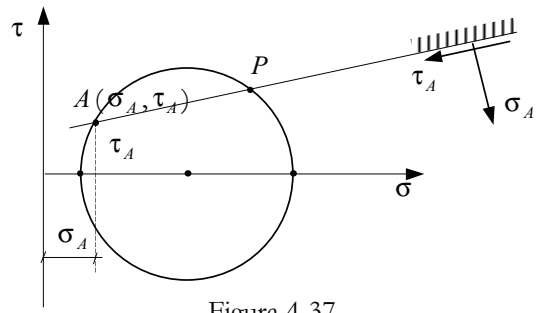


Figura 4-37

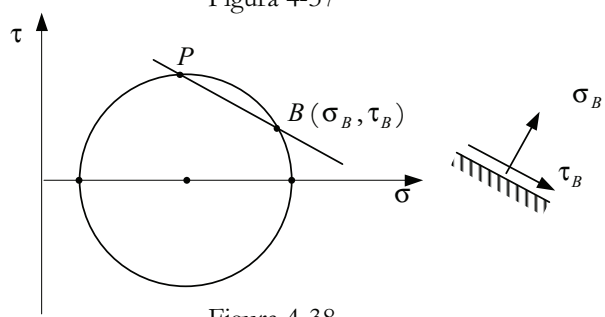


Figura 4-38

Demostración:

Sea el tensor de tensiones en el punto y su representación gráfica sobre los planos cartesianos de la (Figura 4-39, izquierda) denominados plano A (plano vertical) y plano B (plano horizontal). Sean A y B los correspondientes puntos en el círculo de Mohr (Figura 4-39, derecha).

1) Suponiendo que se verifica la propiedad a), el polo del círculo de Mohr podría obtenerse trazando desde el punto A una vertical (paralela al plano A) y donde corte al círculo de Mohr se encuentra el polo P. También trazando desde el punto B una recta horizontal (paralela al plano B) donde corte al círculo de Mohr, se encontraría el polo. Puede verse en la figura que en ambos casos se obtiene el mismo punto *P*.

2) Consideremos ahora un plano arbitrario cuya normal forma un ángulo θ con la horizontal (ver Figura 4-40; izquierda) y sean σ_θ y τ_θ las tensiones normal y tangencial, respectivamente, según este plano. Supongamos además que la tensión principal mayor σ_1 forma un ángulo α con la tensión σ_x. Entonces, la tensión σ_θ formará un ángulo $\theta-\alpha$ con la tensión principal mayor σ_1.

NOTA

Obsérvese que, de acuerdo con el criterio de signos del círculo de Mohr, la tensión tangencial sobre el plano A es $\tau=-\tau_{xy}$

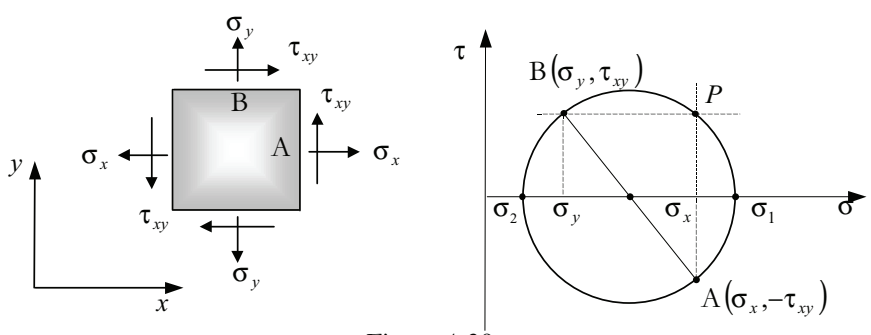


Figura 4-39

NOTA

Se utilizan aquí las siguientes propiedades geométricas:
a)Un ángulo central de circunferencia tiene un valor igual que el arco que abarca.
b) Un ángulo semiinscrito en un una circunferencia tiene un valor la mitad del arco que abarca.

3) Consideremos el círculo de Mohr y el polo P obtenido en el paso 1) (ver Figura 4-40, derecha). Utilizando la propiedad a) del apartado 4.7.5, podemos obtener el punto C, representativo del circulo de Mohr que corresponde al plano considerado, girando desde el punto *M*, y en el mismo sentido, un ángulo doble igual a $2(\theta-\alpha)$ tal que el ángulo *MOC* es $2(\theta-\alpha)$. Por construcción el ángulo *AOM* es 2α y el ángulo *AOC*, suma de ambos, es $2(\theta-\alpha)+2\alpha=2\theta$ y el arco abarcado por el mismo es $AMC=2\theta$. El ángulo semiinscrito *APC*, que abarca el mismo arco *AMC*, valdrá, por tanto, θ, con lo que queda demostrado que la recta *PC es paralela a la traza del plano considerado*. Puesto que dicho plano es cualquiera, la propiedad queda demostrada.

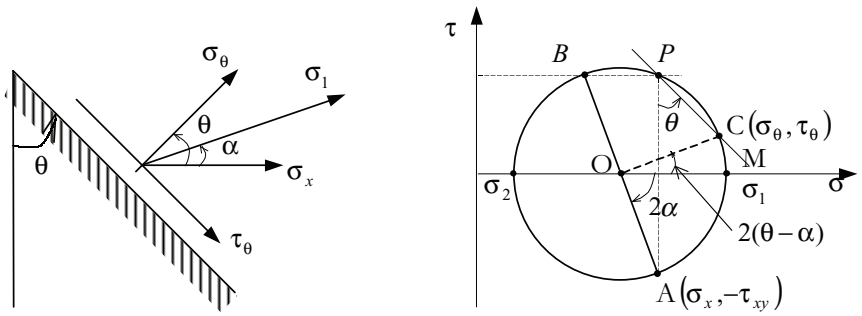
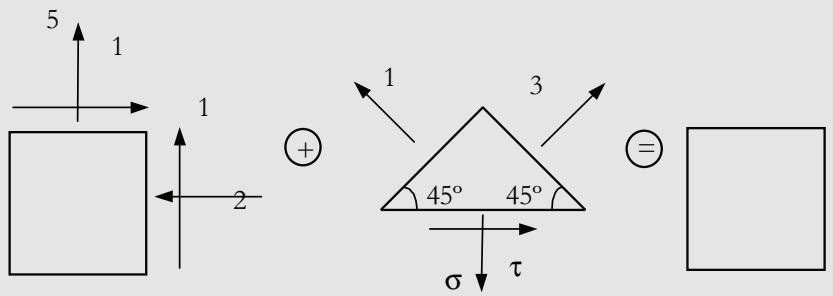


Figura 4-40

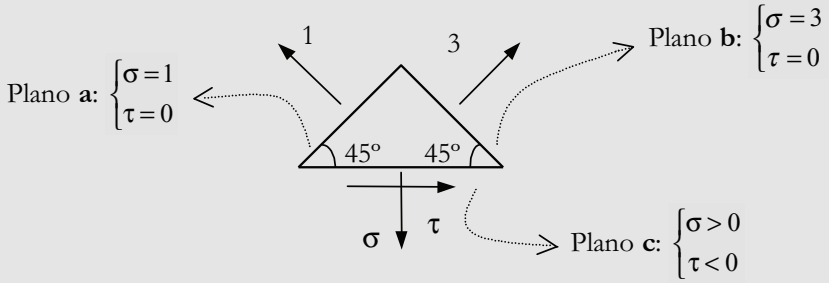
Ejemplo 4-4 – *Calcular las tensiones que actúan en el estado* III = I + II*:*

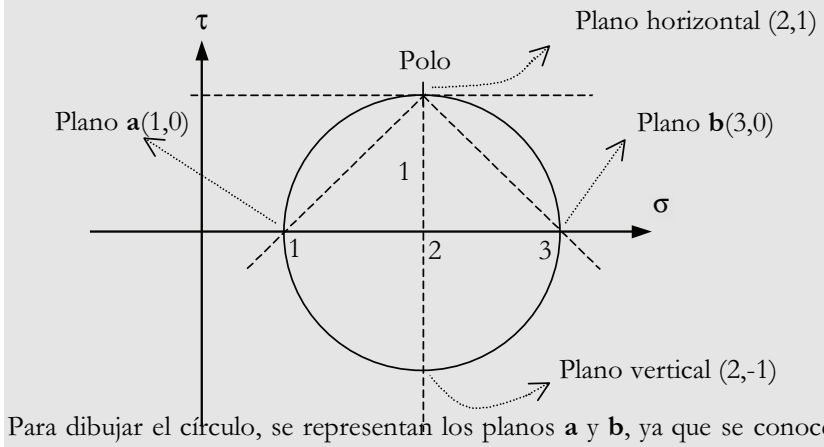


Estado I Estado II Estado III

Resolución:

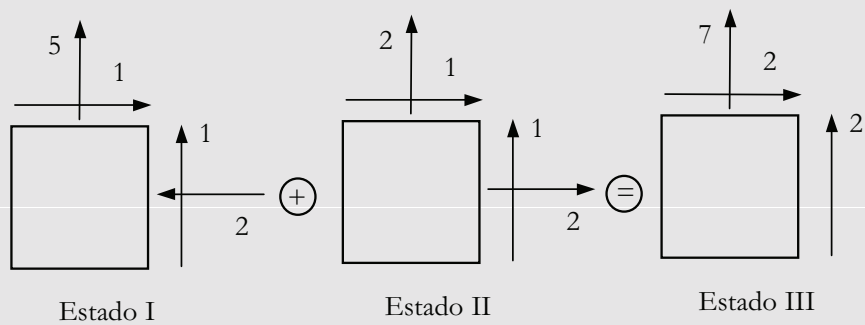
Para poder sumar los dos estados, las tensiones deben actuar sobre los mismos planos. Como los dos estados presentan planos con orientaciones diferentes, deberemos buscar las tensiones del Estado II existentes sobre los planos dados en el Estado I. Para ello, representaremos el *Círculo de Mohr* del Estado II:





Para dibujar el círculo, se representan los planos **a** y **b**, ya que se conocen sus estados tensionales. Además, como los puntos correspondientes en el círculo de Mohr pertenecen al eje de abscisas, definen el diámetro del círculo que queda, por tanto, determinado.

Se encuentra el polo como la intersección de líneas paralelas a los dos planos inclinados 45º por los puntos que los representan. Una vez obtenido, se hace pasar por él una línea horizontal cuya intersección con el círculo (que al ser tangente al mismo es el propio polo) determina el punto representativo de un plano horizontal (2,1). Se repite el procedimiento para un plano vertical obteniendo el punto (2,-1). Con esta información se puede reconstruir el Estado II , ahora sobre planos horizontales y verticales, y sumarlo al Estado I para obtener el Estado III.



4.7.7 Círculo de Mohr con el criterio de signos de la Mecánica de Suelos

En la Mecánica de Suelos se suele utilizar un criterio de signos, respecto a las tensiones normales y tangenciales, que es contrario al utilizado en la Mecánica de Medios Continuos, ver Figura 4-41. Las diferencias son:

- En la Mecánica de Suelos las tensiones positivas son de signo contrario (las tensiones normales son positivas cuando son de *compresión,* y el sentido de las tensiones tangenciales positivas viene definido por un *giro antihorario* respecto al plano).
- El criterio de signos para los ángulos es el mismo (ángulos positivos antihorarios).

Figura 4-41

En consecuencia, si se respeta en ambos casos la ordenación de las tensiones principales ($\sigma_1 \geq \sigma_2$), para un mismo estado tensional el orden de las tensiones principales se invertirá en la Mecánica de Suelos respecto a la Mecánica de Medios Continuos (ver Figura 4-42).

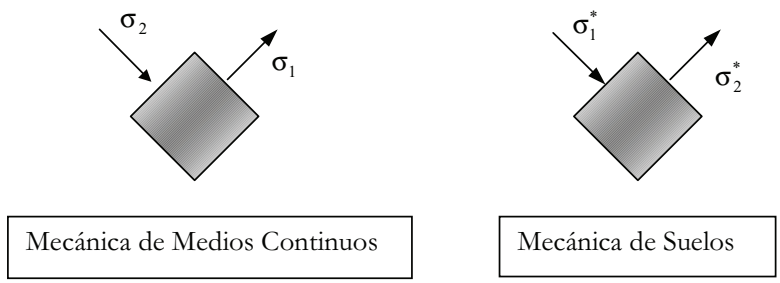


Figura 4-42

Si consideramos las formulas fundamentales (4.75), punto de partida para la construcción y propiedades del círculo de Mohr, para un mismo estado tensional, utilizando los criterios de signos en ambos casos se tiene:

Mecánica de Medios Continuos: $\sigma_\beta,\ \tau_\beta,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \beta$

$$\text{Mecánica de Suelos: } \begin{cases} \sigma^*_\beta = -\sigma_\beta \\ \tau^*_\beta = -\tau_\beta \\ \sigma^*_1 = -\sigma_2 \\ \sigma^*_2 = -\sigma_1 \\ \beta^* = \beta + \pi/2 \end{cases} \tag{4.81}$$

y substituyendo las fórmulas (4.81) en las (4.75) se obtiene:

$$\begin{cases} -\sigma^*_\beta = \dfrac{-\sigma^*_2 - \sigma^*_1}{2} + \dfrac{-\sigma^*_2 + \sigma^*_1}{2} \underbrace{\cos\left(2\beta^* - \pi\right)}_{-COS\left(2\beta^*\right)} \\ -\tau^*_\beta = \dfrac{-\sigma^*_2 + \sigma^*_1}{2} \underbrace{sin\left(2\beta^* - \pi\right)}_{-sin\left(2\beta^*\right)} \end{cases} \Rightarrow \tag{4.82}$$

$$\sigma_\beta^* = \frac{\sigma_1^* + \sigma_2^*}{2} + \frac{\sigma_1^* - \sigma_2^*}{2}\cos(2\beta^*)$$
$$\tau_\beta^* = \frac{\sigma_1^* - \sigma_2^*}{2} sin(2\beta^*) \qquad (4.83)$$

y se observa que las fórmulas fundamentales (4.83), obtenidas sobre la base de los criterios de signos de la Mecánica de Suelos, son las mismas que las (4.75), obtenidas sobre la base de los criterios de signos de la Mecánica de medios Continuos. Por consiguiente, *la construcción del círculo de Mohr y sus propiedades son las mismas en ambos casos*.

4.8 Círculos de Mohr para casos particulares

4.8.1 Estado tensional hidrostático

Para estados tensionales hidrostáticos, caracterizados por $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, los círculos de Mohr en tres dimensiones colapsan en un punto (ver Figura 4-43).

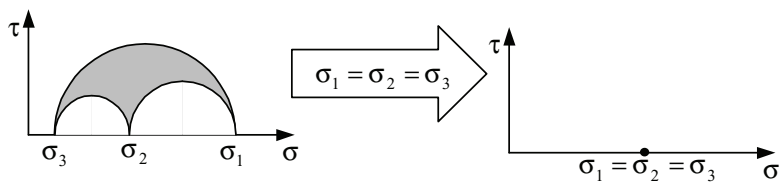


Figura 4-43

4.8.2 Círculos de Mohr de un tensor y de su desviador

Los círculos de Mohr en tres dimensiones asociados a un estado tensional y a su desviador difieren en una traslación igual a la tensión media (ver Figura 4-44).

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{esf}}_{\substack{Parte \\ esferica}} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}'}_{\substack{Parte \\ desviadora}} \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}_{esf} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_m + \sigma_1' \\ \sigma_2 = \sigma_m + \sigma_2' \\ \sigma_3 = \sigma_m + \sigma_3 \end{cases}$$

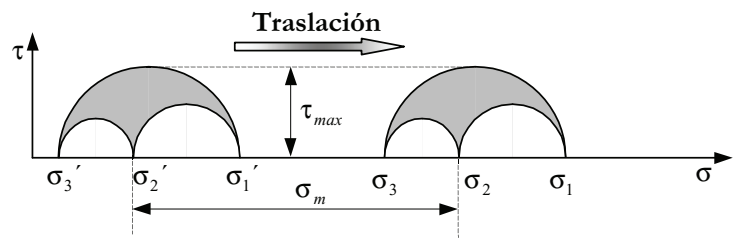


Figura 4-44

4.8.3 Circulo de Mohr para un estado plano de corte puro

Definición:

Estado plano de corte puro: Cuando existen, en el punto, dos planos ortogonales sobre los que solamente hay tensión tangencial (ver Figura 4-45, derecha).

El circulo de Mohr correspondiente *a un estado de corte puro* caracterizado por una tensión tangencial τ^* *tiene por centro el origen y radio* $R = |\tau^*|$. La demostración es inmediata a partir de los criterios de construcción del círculo de Mohr (ver Figura 4-45, izquierda).

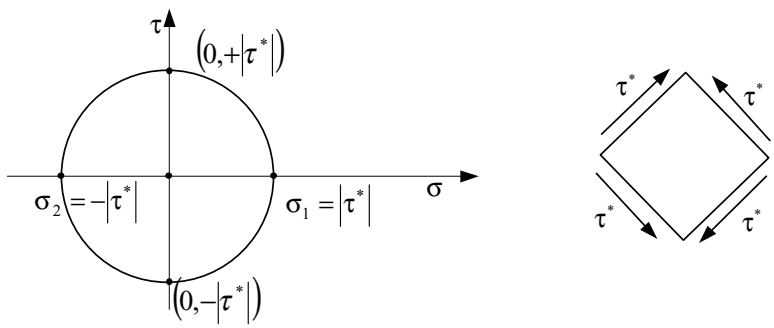


Figura 4-45- Círculo de Mohr para un estado plano de corte puro

5 Ecuaciones de conservación-balance

5.1 Postulados de conservación-balance

La Mecánica de Medios Continuos se asienta en una serie de postulados o principios generales que se suponen válidos siempre, independientemente del tipo de material y del rango de desplazamientos o de deformaciones. Entre estos se encuentran los denominados *Postulados de conservación-balance* que son los siguientes:

- Conservación de la masa.
- Balance del momento cinético (o cantidad de movimiento).
- Balance del momento angular (o momento de la cantidad de movimiento).
- Balance de la energía (o primer principio de la termodinámica).

A estas leyes de conservación-balance es necesario añadir una restricción (que no puede se entendida rigurosamente como un postulado de conservación-balance) introducida por el :

- Segundo principio de la termodinámica.

5.2 Flujo por transporte de masa o flujo convectivo

En Mecánica de Medios Continuos, se asocia el término *convección* al *movimiento de la masa* del medio que se deriva del movimiento de sus partículas. Puesto que el medio continuo está formado por partículas, algunas de cuyas propiedades están asociadas a la cantidad de masa (peso específico, momento cinético, energía cinética, etc.), al moverse las partículas y transportarse sus masas se produce un transporte de dichas propiedades denominado *transporte convectivo* (ver Figura 5-1).

Sea $\mathcal{A}$ una propiedad arbitraria del medio continuo (de carácter escalar, vectorial o tensorial) y $\Psi(\mathbf{x},t)$ la cantidad de dicha propiedad *por unidad de masa* del medio continuo. Consideremos una superficie de control (fija en el espacio) S (ver Figura 5-2). Debido al movimiento de las partículas del medio, éstas atraviesan a lo largo del tiempo dicha superficie y, como consecuencia,

existirá una cierta cantidad de la propiedad $\mathcal{A}$ que, asociada al transporte de masa, atraviesa la superficie de control S por unidad de tiempo.

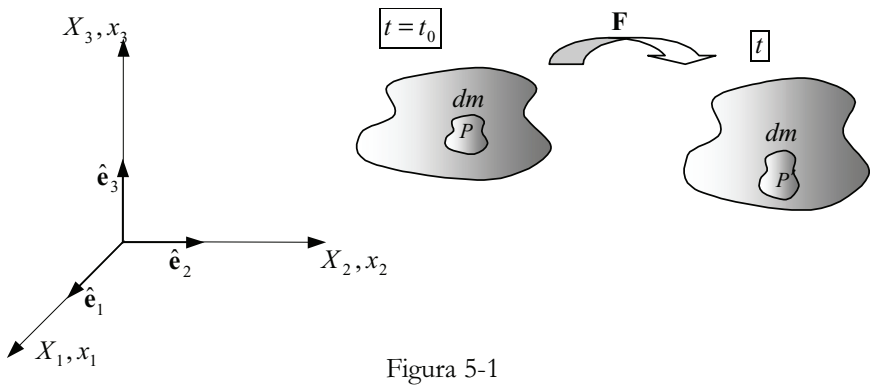


Figura 5-1

Definición:

Flujo convectivo: Se define como flujo convectivo (o flujo por transporte de masa) de una propiedad genérica $\mathcal{A}$ a través de una superficie de control S a la cantidad de $\mathcal{A}$ que, debido al transporte de masa, atraviesa la superficie S por unidad de tiempo.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Flujo convectivo de } \mathcal{A} \\ \text{a través de } S\end{array}\right\} \overset{not}{=} \Phi_S = \frac{\text{cantidad de } \mathcal{A} \text{ que atraviesa } S}{\text{unidad de tiempo}}$$

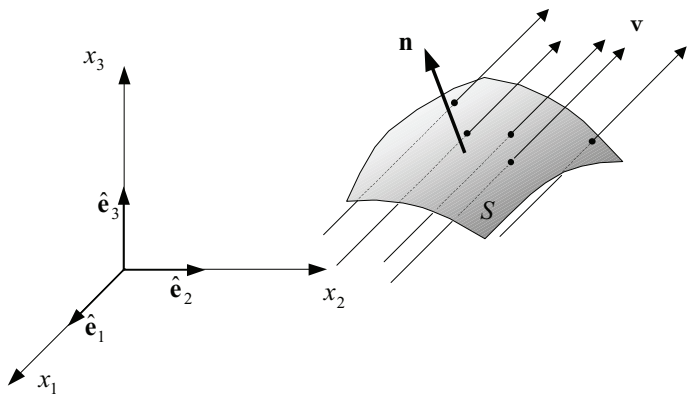


Figura 5-2 – Flujo convectivo a través de una superficie de control

Para obtener la expresión matemática del flujo convectivo de $\mathcal{A}$ a través de la superficie S, consideraremos un elemento diferencial de superficie dS y el vector de velocidades $\mathbf{v}$ de las partículas que en el instante t están sobre dS (ver Figura 5-3). En un diferencial de tiempo dt, éstas partículas habrán recorrido un trayecto $d\mathbf{x} = \mathbf{v}dt$, de forma tal que en el instante de tiempo $t + dt$ ocuparán una nueva posición en el espacio. Si se consideran todas las partículas que han atravesado dS en el intervalo $[t, t + dt]$, éstas ocuparán el cilindro generado al trasladar la base dS sobre la generatriz $d\mathbf{x} = \mathbf{v}dt$, cuyo volumen viene dado por:

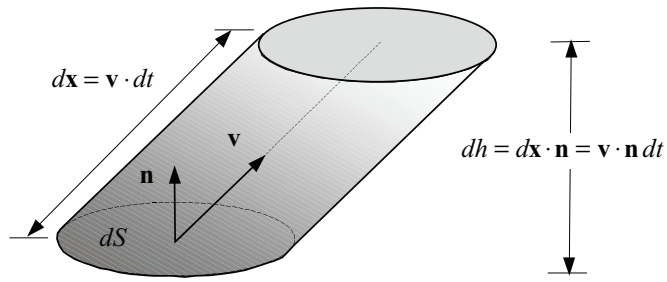


Figura 5-3

$$dV = dS \cdot dh = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dt\, dS \tag{5.1}$$

Conociendo el volumen (dV) de partículas que atraviesan dS en el intervalo de tiempo $[t, t+dt]$, podemos obtener la masa que atraviesa dS en el intervalo de tiempo $[t, t+dt]$, multiplicando (5.1) por la densidad:

$$dm = \rho\ dV = \rho\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\ dt\ dS \tag{5.2}$$

y, finalmente, puede obtenerse la cantidad de $\mathcal{A}$ que atraviesa dS en el intervalo de tiempo $[t, t+dt]$, multiplicando (5.2) por la función Ψ (cantidad de $\mathcal{A}$ por unidad de masa):

$$\Psi\ dm = \rho\, \Psi\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\ dt\ dS \tag{5.3}$$

Dividiendo por dt la expresión (5.3), obtendremos la cantidad de la propiedad que atraviesa el diferencial de superficie de control dS *por unidad de tiempo*:

$$d\,\Phi_S = \frac{\Psi\ dm}{dt} = \rho\, \Psi\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\ dS \tag{5.4}$$

Integrando la ecuación (5.4) sobre la superficie de control S, tendremos la cantidad de la propiedad $\mathcal{A}$ que atraviesa la totalidad de la superficie S por unidad de tiempo, es decir, *el flujo convectivo de la propiedad* $\mathcal{A}$ *a través de* S*:*

$$\left.\begin{array}{l}\text{Flujo convectivo de} \\ \mathcal{A} \text{ a través de } S\end{array}\right\} \rightarrow\ \Phi_S = \int_S \rho \Psi\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\ dS \tag{5.5}$$

Ejemplo 5-1 – *Calcular la magnitud* Ψ *y el correspondiente flujo convectivo* Φ_S *para las siguientes propiedades: a) el volumen, b) la masa, c) la cantidad de movimiento, d) la energía cinética.*

1) Sea la propiedad $\mathcal{A}$ el volumen de las partículas. Entonces Ψ será volumen por unidad de masa (el inverso de la densidad) y:

$$\mathcal{A} \equiv V, \qquad \Psi = \frac{1}{\rho}, \qquad \Phi_S = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\ dS = \text{Caudal}$$

2) Sea la propiedad $\mathcal{A}$ la masa. Entonces Ψ será la masa por unidad de masa (es decir la unidad):

$$\mathcal{A} \equiv M, \qquad \Psi = 1, \qquad \Phi_S = \int_S \rho\, \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\; dS$$

3) Sea la propiedad $\mathcal{A}$ la cantidad de movimiento ($=\text{masa}\times\text{velocidad}$). Entonces Ψ será la velocidad (cantidad de movimiento por unidad de masa):

$$\mathcal{A} \equiv m\,\mathbf{v}, \qquad \mathbf{\Psi} = \mathbf{v}, \qquad \mathbf{\Phi}_S = \int_S \rho\,\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dS$$

(Nótese que en este caso $\mathbf{\Psi}$ y el flujo convectivo $\mathbf{\Phi}_S$ tienen carácter vectorial).

4) Sea la propiedad $\mathcal{A}$ la energía cinética:

$$\mathcal{A} \equiv \frac{1}{2} m\,\mathbf{v}^2, \qquad \Psi = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2, \qquad \Phi_S = \int_S \frac{1}{2}\rho\,\mathbf{v}^2\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dS$$

N O T A

Salvo que se indique lo contrario, cuando se trate con superficies cerradas se tomará el *sentido* de la normal $\mathbf{n}$ *hacia el exterior* de la superficie.

Observación 5-1

Para una superficie de control cerrada $S = \partial V$, la expresión del flujo por transporte de masa o flujo convectivo corresponde al *flujo neto saliente,* definido como *flujo saliente menos el flujo entrante* (ver Figura 5-4).

$$\text{Flujo convectivo neto de } \mathcal{A} = \Phi_{\partial V} = \int_{\partial V} \rho\Psi\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\; dS$$

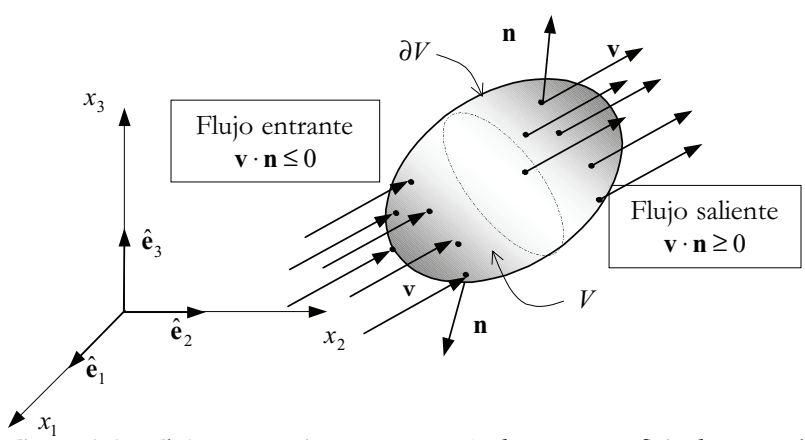


Figura 5-4 – Flujo convectivo neto a través de una superficie de control cerrada

Observación 5-2

El flujo convectivo de cualquier propiedad a través de una superficie material es nulo. En efecto, el flujo convectivo está asociado, por definición, al transporte de masa (de partículas) y, por otro lado, una superficie material está formada siempre por las mismas partículas y no puede ser atravesada por ellas. En consecuencia no existe transporte de masa a través de una superficie material y por lo tanto no existe flujo convectivo a través de la misma.

Observación 5-3

Flujo no convectivo:

Algunas propiedades pueden transportarse en el seno de un medio continuo de forma no necesariamente asociada al movimiento de la masa. Dicha forma de transporte *no convectivo* recibe diversos nombres (conducción, difusión, etc.) dependiendo del problema físico del que se trate. Un ejemplo típico es el flujo de calor por conducción.

El transporte no convectivo de una propiedad queda caracterizado por el denominado *vector de flujo no convectivo* $\mathbf{q}(\mathbf{x},t)$ que permite definir el flujo (no convectivo) a través de una superficie S de normal $\mathbf{n}$ como:

$$\text{Flujo no convectivo} = \int_S \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

5.3 Derivada local y derivada material de una integral de volumen

Sea $\mathcal{A}$ una cierta propiedad (de carácter escalar, vectorial o tensorial) de un medio continuo y sea μ la cantidad de esta propiedad genérica $\mathcal{A}$ por unidad de volumen:

$$\mu(\mathbf{x},t) = \frac{\text{cantidad de } \mathcal{A}}{\text{unidad de volumen}} \tag{5.6}$$

Consideremos un volumen arbitrario V del espacio. En el instante de tiempo t, la cantidad total $Q(t)$ de la propiedad contenida en este volumen será:

$$Q(t) = \int_V \mu(\mathbf{x},t)\, dV \tag{5.7}$$

Si ahora quisiéramos calcular el contenido de la propiedad $\mathcal{A}$ en otro instante $t+\Delta t$, podríamos considerar las siguientes dos situaciones:

NOTA

μ está relacionado con $\Psi = \dfrac{\text{cantidad de } \mathcal{A}}{\text{unidad de masa}}$ mediante $\mu = \rho\,\Psi$ y tiene el mismo orden tensorial que la propiedad $\mathcal{A}$.

1) Se trata con un *volumen de control* V, que por lo tanto está fijo en el espacio y es atravesado por las partículas a lo largo del tiempo, o bien,

2) se trata con *un volumen material* que en el instante de interés t ocupa el volumen del espacio $V_t \equiv V$, aunque ocupa posiciones distintas en el espacio a lo largo del tiempo.

Para cada caso obtendremos valores distintos de la cantidad $Q(t+\Delta t)$ y calculando la diferencia entre las cantidades de $Q(t+\Delta t)$ y $Q(t)$ cuando $\Delta t \to 0$:

$$Q'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t} \tag{5.8}$$

obtendremos dos definiciones *distintas* de derivadas temporales que dan lugar a los conceptos de *derivada local* y *derivada material* de un integral de volumen.

5.3.1 Derivada local

Definición:

Derivada local de una integral de volumen. La derivada local de la integral de volumen $Q(t) = \int_V \mu(\mathbf{x}, t)\ dV$ es la derivada temporal de $Q(t)$ cuando el volumen V es un volumen fijo en el espacio (volumen de control), ver Figura 5-5. Se utilizará la notación:

$$\text{Derivada local} \overset{not}{=} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mu(\mathbf{x}, t)\ dV$$

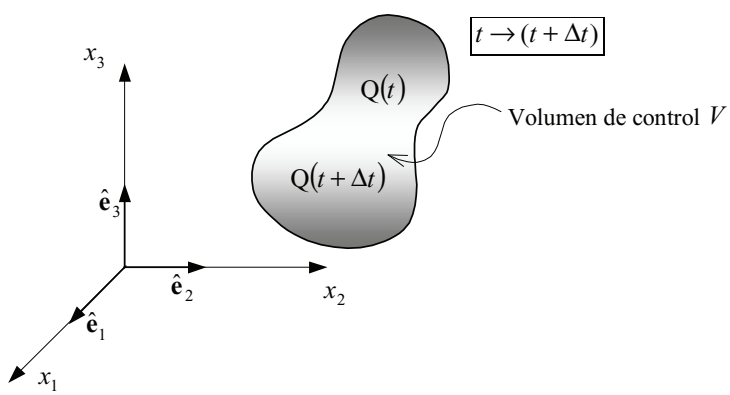


Figura 5-5 – Derivada local de una integral de volumen

La cantidad de la propiedad genérica $\mathcal{A}$ en el *volumen de control* V en los instantes t y $t+\Delta t$ es:

$$\mathrm{Q}(t)=\int_V \mu(\mathbf{x},t)\,dV$$
$$\mathrm{Q}(t+\Delta t)=\int_V \mu(\mathbf{x},t+\Delta t)\,dV \tag{5.9}$$

y utilizando el concepto de derivada temporal de $Q(t)$ y las ecuaciones (5.9)

$$\begin{aligned} Q'(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_V \mu(\mathbf{x},t)\,dV = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[Q(t+\Delta t)-Q(t)\right] \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_V \mu(\mathbf{x},t+\Delta t)\,dV - \int_V \mu(\mathbf{x},t)\,dV\right] = \\ &= \int_V \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mu(\mathbf{x},t+\Delta t)-\mu(\mathbf{x},t)}{\Delta t}}_{\frac{\partial \mu(\mathbf{x},t)}{\partial t}}\,dV = \int_V \underbrace{\frac{\partial \mu(\mathbf{x},t)}{\partial t}}_{\substack{\text{Derivada}\\ \text{local de } \mu}}\,dV \end{aligned} \tag{5.10}$$

NOTA

Nótese que el dominio de integración no varía al considerar que el volumen V es un volumen de control, y por lo tanto fijo en el espacio.

de donde se obtiene la expresión matemática de la derivada local de una integral de volumen:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Derivada local de una}\\ \text{integral de volumen}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_V \mu(\mathbf{x},t)\,dV = \int_V \frac{\partial \mu(\mathbf{x},t)}{\partial t}\,dV \tag{5.11}$$

5.3.2 Derivada material

Definición:

Derivada material de una integral de volumen. La derivada material de la integral de volumen $Q(t)=\int_{V_t} \mu(\mathbf{x},t)\,dV$ es la derivada temporal de $Q(t)$ cuando el volumen V_t es un volumen material (móvil en el espacio), ver Figura 5-5. Se utilizará la notación:

$$\text{Derivada material} \overset{not}{=} \frac{d}{dt}\int_{V_t} \mu(\mathbf{x},t)\,dV$$

El contenido Q de una propiedad $\mathcal{A}$ en el volumen material en los instantes de tiempo t y $t+\Delta t$ será:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int_{V_t} \mu(\mathbf{x},t)\,dV \\ Q(t+\Delta t) &= \int_{V_{t+\Delta t}} \mu(\mathbf{x},t+\Delta t)\,dV \end{aligned} \tag{5.12}$$

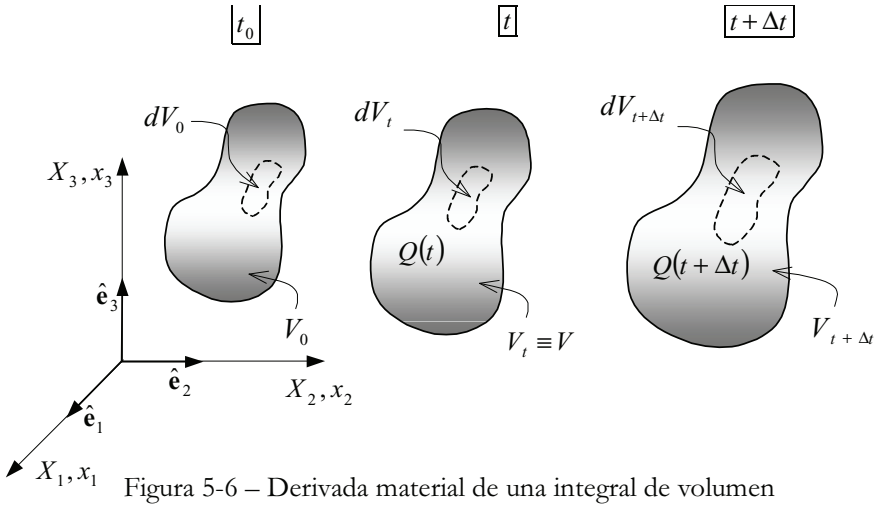


Figura 5-6 – Derivada material de una integral de volumen

NOTA

Nótese que ahora los dominios de integración son diferentes en los instantes t y $t+\Delta t$.

La derivada material se expresa matemáticamente como:

$$Q'(t) = \frac{d}{dt}\int_{V_t} \mu(\mathbf{x},t)\, dV\Big|_{V_t \equiv V} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = \\ = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\int_{V_{t+\Delta t}} \mu(\mathbf{x}, t+\Delta t)\, dV - \int_{V_t} \mu(\mathbf{x},t)\, dV \right] \tag{5.13}$$

El siguiente paso consiste en hacer unos cambios de variable, adecuados para cada una de las dos integrales de la ecuación (5.13), que conduzcan al mismo dominio de integración. Este cambio de variable viene dado por las ecuaciones de movimiento $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$, particularizadas para los instantes t y $t+\Delta t$:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_t = \varphi(\mathbf{X}, t) & \rightarrow \underbrace{(dx_1\, dx_2 dx_3)_t}_{dV_t} = |\mathbf{F}(\mathbf{X},t)|\, \underbrace{(dX_1\, dX_2 dX_3)}_{dV_0} \\ \mathbf{x}_{t+\Delta t} = \varphi(\mathbf{X}, t+\Delta t) & \rightarrow \underbrace{(dx_1\, dx_2 dx_3)_{t+\Delta t}}_{dV_{t+\Delta t}} = |\mathbf{F}(\mathbf{X},t+\Delta t)|\, \underbrace{(dX_1\, dX_2 dX_3)}_{dV_0} \end{cases} \tag{5.14}$$

donde se ha tenido en cuenta la identidad $dV_t = |\mathbf{F}(\mathbf{X},t)|\, dV_0$. Los cambios de variable de la ecuación (5.14) introducidos en la ecuación (5.13) conducen a:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t} \mu(\mathbf{x},t)\, dV = \\ = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\int_{V_0} \underbrace{\mu(\mathbf{x}(\mathbf{X},t+\Delta t), t+\Delta t)}_{\bar{\mu}(\mathbf{X}, t+\Delta t)} |\mathbf{F}(\mathbf{X},t+\Delta t)|\, dV_0 - \int_{V_0} \underbrace{\mu(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)}_{\bar{\mu}(\mathbf{X},t)} |\mathbf{F}(\mathbf{X},t)|\, dV_0 \right] = \\ = \int_{V_0} \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\bar{\mu}(\mathbf{X},t+\Delta t)|\mathbf{F}(\mathbf{X},t+\Delta t)| - \bar{\mu}(\mathbf{X},t)|\mathbf{F}(\mathbf{X},t)|}{\Delta t}}_{\frac{\partial}{\partial t}\left[\bar{\mu}(\mathbf{X},t)|\mathbf{F}(\mathbf{X},t)|\right] = \frac{d}{dt}\left[\mu(\mathbf{x},t)|\mathbf{F}(\mathbf{x},t)|\right]} dV_0 = \int_{V_0} \frac{d}{dt}\left[\mu\,|\mathbf{F}|\right] dV_0 \tag{5.15}$$

Finalmente, desarrollando el último integrando de la ecuación (5.14) y teniendo en cuenta la igualdad $\frac{d|\mathbf{F}|}{dt} = |\mathbf{F}|\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}$:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t}\mu(\mathbf{x},t)\,dV = \int_{V_0}\frac{d}{dt}\left(\mu\,|\mathbf{F}|\right)dV_0 = \int_{V_0}\left(\frac{d\mu}{dt}|\mathbf{F}| + \underbrace{\frac{d|\mathbf{F}|}{dt}}_{|\mathbf{F}|\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}}\mu\right)dV_0 =$$
$$\int_{V_0}\left(\frac{d\mu}{dt}+\mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}\right)\underbrace{|\mathbf{F}|\,dV_0}_{dV_t} = \int_{V_t}\left(\frac{d\mu}{dt}+\mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}\right)dV \tag{5.16}$$

NOTA

Se deshace aquí el cambio de variable $\mathbf{x}_t = \varphi(\mathbf{X},t)$

es decir:

$$\boxed{\left.\frac{d}{dt}\int_{V_t}\mu(\mathbf{x},t)\,dV\right|_{V_t\equiv V} \overset{not}{=} \frac{d}{dt}\int_{V_t\equiv V}\mu(\mathbf{x},t)\,dV = \int_V\left(\frac{d\mu}{dt}+\mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}\right)dV} \tag{5.17}$$

NOTACIÓN

$\frac{d}{dt}\int_{V_t\equiv V}\mu(\mathbf{x},t)\,dV$ denota la derivada temporal de la integral sobre el volumen material V_t (derivada material de la integral de volumen) *particularizada en el instante* t *en el que dicho volumen material ocupa el volumen del espacio* V.

Recordando la expresión de la derivada material de una propiedad ($\frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial\mu}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mu$) se tiene finalmente:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t\equiv V}\mu(\mathbf{x},t)\,dV = \int_V\left[\frac{\partial\mu}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mu + \mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}}_{\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mu\mathbf{v})}\right]dV =$$
$$\int_V\frac{\partial\mu}{\partial t}\,dV + \int_V\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mu\mathbf{v})\,dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_V\mu\,dV + \int_V\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mu\mathbf{v})\,dV \tag{5.18}$$

donde se ha tenido en cuenta la expresión de la derivada local (5.11). De la ecuación (5.18) se obtiene la expresión para la derivada material de una integral de volumen:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Derivada material}\\ \text{de una integral}\\ \text{de volumen}\end{array}\right\} \rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt}\int_{V_t\equiv V}\mu(\mathbf{x},t)\,dV}_{\text{Derivada material}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V\mu\,dV}_{\text{Derivada local}} + \underbrace{\int_V\nabla\cdot(\mu\mathbf{v})\,dV}_{\text{Derivada convectiva}} \tag{5.19}$$

Observación 5-4

El formato de derivada material, como suma de una derivada local y una derivada convectiva, que aparece al *derivar propiedades* del medio continuo (ver capítulo 1, apartado 1.4) aparece también aquí al *derivar integrales* en el medio continuo. De nuevo la *derivada convectiva* está asociada a la existencia de velocidad (o de movimiento) en el medio y, por lo tanto, a la posibilidad del transporte de masa.

5.4 Conservación de la masa. Ecuación de continuidad

Definición:

Principio de conservación de la masa. La masa del medio continuo (y por tanto la de cualquier volumen material del mismo que se considere) es siempre la misma.

Sea un volumen material V_t que en los instantes de tiempo t y $t+\Delta t$ ocupa los volúmenes en el espacio V_t y $V_{t+\Delta t}$ (ver Figura 5-7). Sea $\rho(\mathbf{x},t)$ la descripción espacial de la densidad. La masa encerrada por el volumen material V en los instantes de tiempo t y $t+\Delta t$ es:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(t) &= \int_{V_t} \rho(\mathbf{x},t)\,dV \\ \mathcal{M}(t+\Delta t) &= \int_{V_{t+\Delta t}} \rho(\mathbf{x},t+\Delta t)\,dV\end{aligned} \tag{5.20}$$

Por el principio de conservación de la masa se verificará que $\mathcal{M}(t) = \mathcal{M}(t+\Delta t)$.

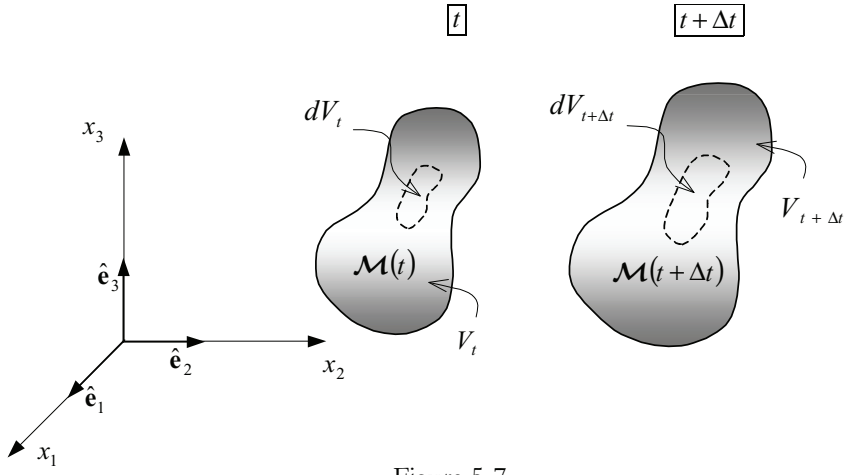


Figura 5-7

5.4.1 Forma espacial del principio de la conservación de la masa. Ecuación de la continuidad

La expresión matemática del principio de conservación de la masa del volumen material $\mathcal{M}(t)$ es que la *derivada material* de la integral (5.20) es nula:

$$\mathcal{M}'(t) = \frac{d}{dt}\int_{V_t} \rho\, dV = 0 \qquad \forall t \tag{5.21}$$

Utilizando la expresión de la derivada material de una integral de volumen (5.17), la forma integral (o global) espacial de la ecuación de conservación de masa resulta:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Forma global}\\ \text{espacial de la}\\ \text{conservación}\\ \text{de la masa.}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{d}{dt}\int\limits_{V_t(\Delta V_t)} \rho\, dV = \int\limits_{V_t(\Delta V_t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v}\right) dV = 0 \quad \forall \Delta V_t \subset V_t \quad \forall t \tag{5.22}$$

NOTA

Este procedimiento, que permite pasar de un expresión global (o integral), como la (5.22) a una expresión local (o diferencial), como la (5.24), se denomina en Mecánica de Medios Continuos proceso de *localización*.

La expresión (5.22) debe cumplirse no solo para V_t sino también para todo volumen material *parcial*, $\Delta V_t \subset V_t$ que se considere. En particular, debe cumplirse para cada uno de los volúmenes materiales elementales asociados a las diferente partículas del medio del medio que ocupan volúmenes diferenciales dV_t. Aplicando la ecuación (5.22) a cada volumen diferencial $dV_t \equiv dV(\mathbf{x},t)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{dV(\mathbf{x},t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v}\right) dV = \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v}\right](\mathbf{x},t)\, dV(\mathbf{x},t) = 0 \quad \forall \mathbf{x}\in V_t \quad \forall t \quad \Rightarrow \\ &\qquad \frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \quad \forall \mathbf{x}\in V_t \quad \forall t\end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Forma local espacial}\\ \text{de la conservación}\\ \text{de la masa (ecuación de}\\ \text{continuidad).}\end{array}\right\} \rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{x}\in V_t \quad \forall t \tag{5.24}$$

que constituye la denominada *ecuación de continuidad*. Utilizando la expresión de la derivada material de la descripción espacial de una propiedad ($\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho$) y substituyendo en la ecuación (5.24):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{v}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\mathbf{v}}_{\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{5.25}$$

que constituye una expresión alternativa de la ecuación de continuidad:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0\\ \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad i\in\{1,2,3\}\\ \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0\end{array}\right\} \quad \forall \mathbf{x}\in V_t \quad \forall t \tag{5.26}$$

5.4.2 Forma material del principio de la conservación de la masa.

De la ecuación (5.22):

RECORDATORIO

Se considera aquí la expresión, deducida en el capítulo 2,

$$\frac{d|\mathbf{F}|}{dt} = |\mathbf{F}| \cdot \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\int_{V_t} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV = \int_{V_t} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{1}{|\mathbf{F}|} \frac{d|\mathbf{F}|}{dt} \right) dV = \int_{V_t} \frac{1}{|\mathbf{F}|} \underbrace{\left[|\mathbf{F}| \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d|\mathbf{F}|}{dt} \right]}_{\frac{d}{dt}(\rho |\mathbf{F}|)} dV =$$

$$= \int_{V_t} \frac{1}{|\mathbf{F}|} \frac{d}{dt}(\rho |\mathbf{F}|) \widetilde{|\mathbf{F}| dV_0} = \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} [\rho |\mathbf{F}|](\mathbf{X}, t)\, dV_0 = 0 \quad \forall \Delta V_0 \subset V_0 \quad \forall t \tag{5.27}$$

donde ahora el recinto de integración es el volumen de la configuración de referencia V_0. Puesto que la ecuación (5.27) debe cumplirse para todas y cada una de las partes ΔV_0 de V_0, puede llevarse a cabo un proceso de localización que conduce a:

RECORDATORIO

Se utiliza aquí la igualdad,

$$\mathbf{F}(\mathbf{X},0) = \mathbf{1} \Rightarrow |\mathbf{F}|_0 = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial t}[\rho |\mathbf{F}|](\mathbf{X},t) = 0 \quad \forall \mathbf{X} \in V_0 \quad \forall t \Rightarrow \rho |\mathbf{F}|(\mathbf{X},t) = \rho |\mathbf{F}|(\mathbf{X}) \quad \forall t \\ \Rightarrow \underbrace{\rho(\mathbf{X},0)|\mathbf{F}|(\mathbf{X},0)}_{\overset{not}{=} \rho_0 |\mathbf{F}|_0} = \underbrace{\rho(\mathbf{X},t)|\mathbf{F}|(\mathbf{X},t)}_{\overset{not}{=} \rho_t |\mathbf{F}|_t} \Rightarrow \rho_0 \underbrace{|\mathbf{F}|_0}_{=1} = \rho_t |\mathbf{F}|_t \end{array}\right\} \Rightarrow \tag{5.28}$$

Forma local material del principio de la conservación de la masa.	$\rightarrow \rho_0(\mathbf{X}) = \rho_t(\mathbf{X})\, |\mathbf{F}|_t(\mathbf{X}) \quad \forall \mathbf{X} \in V_0 \quad \forall t$

(5.29)

5.5 Ecuación de balance. Teorema del transporte de Reynolds

Sea $\mathcal{A}$ una cierta propiedad genérica (escalar, vectorial o tensorial) de un medio continuo, y sea $\psi(\mathbf{x},t)$ la cantidad de esta propiedad $\mathcal{A}$ por *unidad de masa*. Por consiguiente, $\rho\psi(\mathbf{x},t)$ es la cantidad de la propiedad por *unidad de volumen*.

5.5.1 Lema de Reynolds

Consideremos un volumen *material* arbitrario de medio continuo que en el instante t ocupa en el espacio un volumen $V_t \equiv V$. La cantidad de la propiedad genérica $\mathcal{A}$ en el volumen material V_t en el instante t será:

$$Q(t) = \int_{V_t \equiv V} \rho\, \psi\, dV \tag{5.30}$$

La variación a lo largo del tiempo del contenido de la propiedad $\mathcal{A}$ en el volumen material V_t vendrá dada por la derivada temporal de $Q(t)$, que utilizando la expresión (5.17) de la derivada material de una integral de volumen (con $\mu = \rho\psi$) será:

$$Q'(t) = \frac{d}{dt} \int_{V_t \equiv V} \underbrace{\rho\psi}_{\mu} dV = \int_V \left[\frac{d(\rho\psi)}{dt} + \rho\psi \nabla \cdot \mathbf{v} \right] dV \tag{5.31}$$

Utilizando la expresión para la derivada material de un producto de funciones, agrupando términos y utilizando la ecuación de continuidad (5.24):

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t\equiv V}\rho\psi dV =$$

$$\int_V\left[\rho\frac{d\psi}{dt}+\psi\frac{d\rho}{dt}+\rho\psi\nabla\cdot\mathbf{v}\right]dV=\int_V\Big[\ \rho\frac{d\psi}{dt}+\psi\underbrace{\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{v}\right)}_{=0\quad(\text{Ec. de continuidad})}\ \Big]dV\Rightarrow \tag{5.32}$$

$$\boxed{\text{Lema de Reynolds}:\rightarrow\frac{d}{dt}\int_{V_t\equiv V}\rho\psi\ dV=\int_V\rho\frac{d\psi}{dt}dV} \tag{5.33}$$

5.5.2 Teorema de Reynolds

Consideremos el volumen arbitrario V, fijo en el espacio, de la Figura 5-8. La cantidad de la propiedad $\mathcal{A}$ en este volumen de control será:

$$Q(t)=\int_V\rho\psi\,dV \tag{5.34}$$

La variación de la cantidad de la propiedad $\mathcal{A}$ en el volumen material V_t, que de forma instantánea coincide en el instante t con el volumen de control $V\ (V_t\equiv V)$, vendrá dada por la derivada material de la expresión (5.19) (con $\mu=\rho\psi$) y la ecuación (5.11):

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t\equiv V}\rho\psi\,dV=\int_V\frac{\partial(\rho\,\psi)}{\partial t}dV+\int_V\nabla\cdot(\rho\,\psi\,\mathbf{v})\,dV \tag{5.35}$$

Utilizando el lema de Reynolds (5.33) y el teorema de la divergencia en la expresión (5.35) se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{V_t\equiv V}\rho\psi\,dV &\overset{\text{Lema de Reynolds}}{=}\int_V\rho\frac{d\psi}{dt}dV=\int_V\frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t}dV+\int_V\nabla\cdot(\rho\,\psi\,\mathbf{v})\,dV=\\ &\overset{\text{Teorema de la divergencia}}{=}\int_V\frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t}dV+\int_{\partial V}\rho\,\psi\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS\end{aligned} \tag{5.36}$$

expresión (5.36) que puede ser reescrita como:

Teorema del Transporte de Reynolds:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V\rho\,\psi\,dV}_{\substack{\text{Variación por unidad de tiempo del contenido de la propiedad } \mathcal{A} \text{ en el volumen de control } V.}}=\underbrace{\int_V\rho\frac{d\psi}{dt}dV}_{\substack{\text{Variación debida al cambio del contenido de la propiedad } \mathcal{A} \text{ en las partículas del interior de } V}}-\underbrace{\int_{\partial V}\rho\,\psi\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dV}_{\substack{\text{Variación debida al flujo convectivo neto de } \mathcal{A}, \text{saliente por el contorno } \partial V}} \tag{5.37}$$

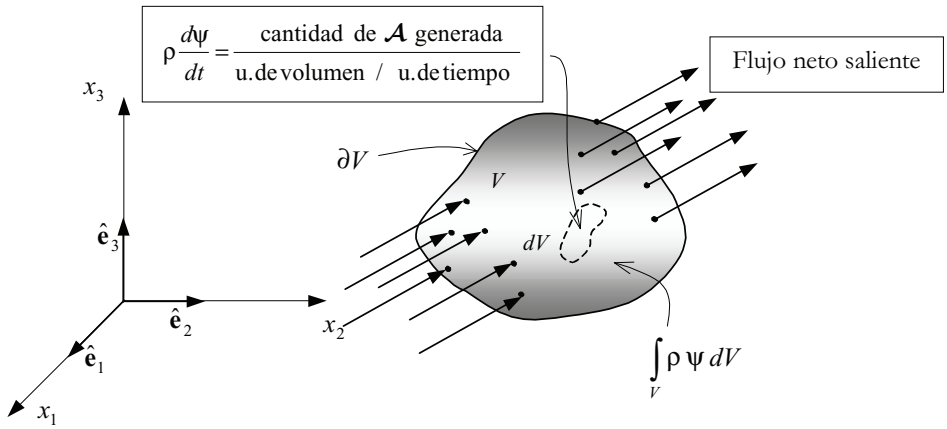


Figura 5-8

La forma local del Teorema del transporte de Reynolds puede ser obtenida localizando en la ecuación (5.36):

$$\int_V \rho\frac{d\psi}{dt}\,dV = \int_V \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t}\,dV + \int_V \nabla\cdot(\rho\,\psi\,\mathbf{v})\,dV \quad \forall \Delta V \subset V \Rightarrow$$
$$\rho\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\,\psi\,\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{x}\in V \Rightarrow \tag{5.38}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Forma local}\\ \text{del Teorema de}\\ \text{transporte de Reynolds}\end{array}\right\} \rightarrow \quad \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} = \rho\frac{d\psi}{dt} - \nabla\cdot(\rho\,\psi\,\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{x}\in V \tag{5.39}$$

5.6 Expresión general de las ecuaciones de balance

Considérese una cierta propiedad $\mathcal{A}$ de un medio continuo y sea $\psi(\mathbf{x},t)$ la cantidad de esta propiedad por unidad de masa. Se supondrá, en el caso más general, que existe una fuente interna de generación de la propiedad $\mathcal{A}$ y que dicha propiedad puede transportarse tanto por el movimiento de la masa (transporte convectivo) como por transporte no convectivo. Para ello se define:

- Un término fuente $k_{\mathcal{A}}(\mathbf{x},t)$ (del mismo orden tensorial que la propiedad $\mathcal{A}$) que caracteriza la generación interna de la propiedad:

$$k_{\mathcal{A}}(\mathbf{x},t) = \frac{\text{cantidad de } \mathcal{A} \text{ generada interiormente}}{\text{unidad de masa/unidad de tiempo}} \tag{5.40}$$

- Un vector $\mathbf{j}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x},t)$, de flujo no convectivo por unidad de superficie (un orden tensorial superior al de la propiedad $\mathcal{A}$) que caracteriza el flujo de la propiedad debido a mecanismos no convectivos (ver Observación 5-3).

Sea V un volumen de control arbitrario (ver Figura 5-9). La variación por unidad de tiempo de la cantidad de la propiedad $\mathcal{A}$ en el volumen V será debida a:

1) la generación de la propiedad $\mathcal{A}$ por unidad de tiempo debida al término fuente,
2) el flujo convectivo (neto-entrante) de $\mathcal{A}$ a través de ∂V,
3) el flujo no convectivo (neto-entrante) de $\mathcal{A}$ a través de ∂V:

$$\begin{aligned}
\int_V \rho\, k_{\mathcal{A}}(\mathbf{x},t)\, dV &= \frac{\text{cantidad de } \mathcal{A} \text{ que se genera en } V \text{ debido a fuentes internas}}{\text{unidad de tiempo}} \\
\int_{\partial V} \rho\, \psi\, \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS &= \frac{\text{cantidad de } \mathcal{A} \text{ que sale por } \partial V \text{ por flujo convectivo}}{\text{unidad de tiempo}} \\
\int_{\partial V} \mathbf{j}_{\mathcal{A}}\cdot\mathbf{n}\, dS &= \frac{\text{cantidad de } \mathcal{A} \text{ que sale por } \partial V \text{ por flujo no convectivo}}{\text{unidad de tiempo}}
\end{aligned} \tag{5.41}$$

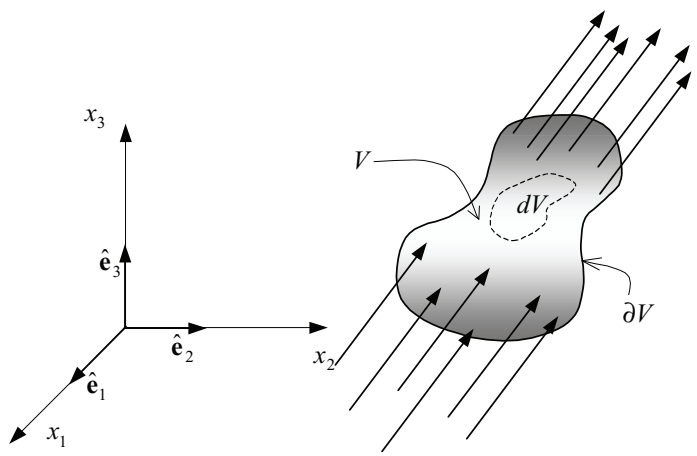


Figura 5-9

y la ecuación que expresa *el balance de la cantidad de la propiedad* $\mathcal{A}$ *en el volumen de control* V se escribe :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Forma}\\ \text{global de}\\ \text{la ecuación}\\ \text{de balance}\end{array}\right\} \rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\,\psi\, dV}_{\substack{\text{Variación de la cantidad de } \mathcal{A} \text{ en V por unidad de tiempo}}} = \underbrace{\int_V \rho\, k_{\mathcal{A}}\, dV}_{\substack{\text{Variación debida a la generación interna}}} \underbrace{-\int_{\partial V} \rho\,\psi\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS}_{\substack{\text{Variación debida al flujo convectivo entrante}}} \underbrace{-\int_{\partial V} \mathbf{j}_{\mathcal{A}}\cdot\mathbf{n}\, dS}_{\substack{\text{Variación debida al flujo no-convectivo entrante}}} \tag{5.42}$$

Utilizando el teorema de la divergencia y la ecuación (5.11), la ecuación (5.42) se puede escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\,\psi\,dV = \int_V \rho\,k_{\mathcal{A}}\,dV - \int_V \nabla\cdot(\rho\,\psi\,\mathbf{v})\,dV - \int_V \nabla\cdot\mathbf{j}_{\mathcal{A}}\,dV \quad \Rightarrow$$
$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\psi) + \nabla\cdot(\rho\,\psi\,\mathbf{v})\right]dV = \int_V (\rho k_{\mathcal{A}} - \nabla\cdot\mathbf{j}_{\mathcal{A}})\,dV \quad \forall \Delta V \subset V \tag{5.43}$$

y localizando en la ecuación (5.43), se obtiene la forma local espacial de la ecuación general de balance:

Forma local espacial de la ecuación general de balance :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\psi) + \nabla\cdot(\rho\psi\mathbf{v})}_{\rho\frac{d\psi}{dt}} = \underbrace{\rho\frac{d\psi}{dt}}_{\substack{\text{Variación de la cantidad de la propiedad (por unidad de volumen y de tiempo)}}} = \underbrace{\rho k_{\mathcal{A}}}_{\substack{\text{Variación debida a la generación interna de las fuentes}}} \underbrace{-\nabla\cdot\mathbf{j}_{\mathcal{A}}}_{\substack{\text{Variación debida al transporte no convectivo}}} \tag{5.44}$$

donde se ha considerado la ecuación (5.39).

Observación 5-5

Las expresión (5.42) y, especialmente, la (5.44):

$$\rho\frac{d\psi}{dt} = \rho k_{\mathcal{A}} - \nabla\cdot\mathbf{j}_{\mathcal{A}}$$

pone de manifiesto la contribución negativa $(-\nabla\cdot\mathbf{j}_{\mathcal{A}})$ del flujo no convectivo, a la variación del contenido de la propiedad por unidad de volumen y de tiempo $\rho\frac{d\psi}{dt}$. Solamente cuando todo el flujo es convectivo (por transporte de masa) dicha variación procede únicamente de la generación interna de la propiedad :

$$\rho\frac{d\psi}{dt} = \rho k_{\mathcal{A}}$$

Ejemplo 5-2 – Si asociamos la propiedad $\mathcal{A}$ con la masa , $\mathcal{A} \equiv \mathcal{M}$, tendremos:

- El contenido de $\mathcal{A}$ por unidad de masa (masa/unidad de masa) es $\psi = 1$.
- El término fuente de generación de masa es $k_{\mathcal{M}} = 0$, ya que no es posible generar masa (por el principio de conservación de la masa).
- El vector de flujo no convectivo de masa es $\mathbf{j}_{\mathcal{M}} = 0$, ya que no se puede transportar masa de forma no convectiva.

Entonces la ecuación (5.44) (balance de la generación de masa) queda:

$$\rho\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0$$

que es una de las formas de la ecuación de continuidad (ver ecuación (5.26)).

5.7 Balance de la cantidad de movimiento

Supóngase un sistema discreto formado por n partículas tal que la partícula i tiene una masa m_i, una aceleración $\mathbf{a}_i$ y está sometida a una fuerza $\mathbf{f}_i$ (ver Figura 5-9).

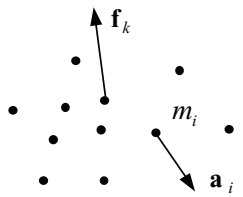


Figura 5-9

La segunda ley de Newton establece que la fuerza que actúa sobre una partícula es igual a la masa de la misma por su aceleración. Utilizando la definición de aceleración como derivada material de la velocidad y teniendo en cuenta el principio de conservación de la masa (la variación de la masa de la partícula es igual a cero) se tiene:

$$\mathbf{f}_i = m_i \mathbf{a}_i = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_i \mathbf{v}_i\right) \tag{5.45}$$

TERMINOLOGIA

En Mecánica suelen utilizarse también los nombres *Momento Cinético* o *Momentum* para designar la cantidad de movimiento.

Definiendo la *cantidad de movimiento de la partícula* como el producto de su masa por su velocidad ($m_i \mathbf{v}_i$), la ecuación (5.45) expresa que la fuerza que actúa sobre la partícula es igual a la variación de la cantidad de movimiento de la misma.

Aplicando, ahora la segunda ley de Newton al sistema discreto formado por n partículas tendremos:

$$\mathbf{R}(t) = \sum_i \mathbf{f}_i = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}_{\substack{\mathcal{P}= \\ \text{cantidad de} \\ \text{movimiento}}} = \frac{d\mathcal{P}(t)}{dt} \tag{5.46}$$

Nótese que, de nuevo, para obtener la última expresión de (5.46) se ha utilizado el principio de conservación de la masa ($\frac{dm_i}{dt} = 0$). La ecuación (5.46) expresa que *la resultante* $\mathbf{R}$ *de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema discreto de partículas es igual a la variación por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento* $\mathcal{P}$ *del mismo*. Este postulado recibe el nombre *de Principio del balance de la cantidad de movimiento*.

Observación 5-6

Si el sistema se encuentra en equilibrio $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ y:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t \Rightarrow \frac{d\mathcal{P}(\mathrm{t})}{dt} = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \mathcal{P} = ctte$$

y se habla entonces de la *conservación* de la cantidad de movimiento.

5.7.1 Forma global del principio de balance de la cantidad de movimiento

Estos conceptos, correspondientes a la mecánica clásica, pueden ahora extenderse a la Mecánica de Medios Continuos, definiendo la cantidad de movimiento de un volumen material V_t de medio continuo de masa $\mathcal{M}$ como:

$$\mathcal{P}(t) = \int_{\mathcal{M}} \mathbf{v}\, \underbrace{d\mathcal{M}}_{\rho\, dV} = \int_{V_t} \rho\, \mathbf{v}\, dV \tag{5.47}$$

Definición:

Principio de balance de la cantidad de movimiento: la resultante $\mathbf{R}(t)$ de todas las fuerzas que actúan sobre un volumen material del medio continuo es igual a la variación por unidad de tiempo de su cantidad de movimiento:

$$\mathbf{R}(t) = \frac{d\mathcal{P}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V_t} \rho\, \mathbf{v}\, dV$$

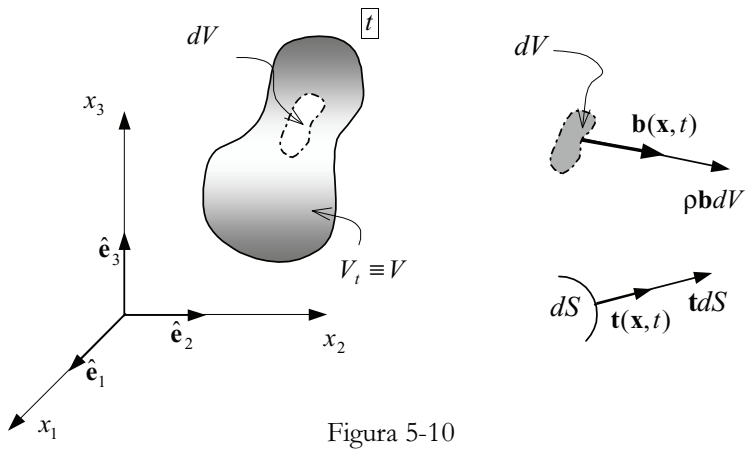


Figura 5-10

donde la resultante de todas las fuerzas que actúan en el medio continuo es (ver Figura 5-10):

$$\mathbf{R}(t) = \underbrace{\int_V \rho\, \mathbf{b}\, dV}_{\substack{\text{Fuerzas} \\ \text{másicas}}} + \underbrace{\int_{\partial V} \mathbf{t}\, dS}_{\substack{\text{Fuerzas de} \\ \text{superficie}}} \tag{5.48}$$

Aplicando la ecuación del balance de la cantidad de movimiento con la resultante (5.48) se obtiene la forma integral del balance de la cantidad de movimiento:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Forma global del principio} \\ \text{de balance de la cantidad} \\ \text{de movimiento}\end{array}\right\} \rightarrow \int_V \rho\, \mathbf{b}\, dV + \int_{\partial V} \mathbf{t}\, dS = \frac{d}{dt}\int_{V_t \equiv V} \rho\, \mathbf{v}\, dV \tag{5.49}$$

5.7.2 Forma local del principio de balance de la cantidad de movimiento

Aplicando el lema de Reynolds (5.33) a la ecuación (5.49) (y utilizando el teorema de la divergencia), se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{V_t\equiv V}\rho\,\mathbf{v}\,dV=\int_{V}\rho\,\mathbf{b}\,dV+\int_{\partial V}\underbrace{\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{t}}\,dS=\int_{V_t\equiv V}\rho\,\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}\,dV \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{Teorema de la divergencia} \\ \displaystyle\int_{\partial V}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,dS \qquad = \qquad \int_{V}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\,dV \end{array}\right\}\Rightarrow \tag{5.50}$$

$$\Rightarrow\int_{V}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\,\mathbf{b}\right)dV=\int_{V}\rho\,\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,dV\quad\forall\Delta V\subset V \tag{5.51}$$

y localizando en la ecuación (5.51), se obtiene *la forma local espacial del balance de la cantidad de movimiento*, también denominada Ecuación de Cauchy:

NOTA

Se identifica así la ecuación de Cauchy (enunciada, aunque no deducida, en el capítulo 4) como la *forma local espacial del principio de balance de la cantidad de movimiento*.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Forma local espacial}\\ \text{del balance de la cantidad}\\ \text{de movimiento}\\ \text{(Ecuación de Cauchy)}\end{array}\right\}\rightarrow\ \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{b}=\rho\,\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\rho\,\mathbf{a}\quad\forall\mathbf{x}\in V\quad\forall t \tag{5.52}$$

5.8 Balance del momento de la cantidad de movimiento (momento angular)

TERMINOLOGIA

En Mecánica suele utilizarse también el nombre de *Momento angular* para designar el momento de la cantidad de movimiento.

Consideremos un sistema discreto formado por n partículas tal que para una partícula arbitraria i, su vector posición es $\mathbf{r}_i$, su masa es m_i, actúa sobre ella una fuerza $\mathbf{f}_i$ y tiene una velocidad $\mathbf{v}_i$ y una aceleración $\mathbf{a}_i$ (ver Figura 5-10). El momento respecto al origen de la fuerza que actúa sobre ésta partícula será $\mathbf{M}_i=\mathbf{r}_i\times\mathbf{f}_i$ y el *momento* respecto al origen *de la cantidad de movimiento* de la partícula será $\boldsymbol{\mathcal{L}}_i=\mathbf{r}_i\times m_i\mathbf{v}_i$. Teniendo en cuenta la segunda ley de Newton, el momento $\mathbf{M}_i$ será:

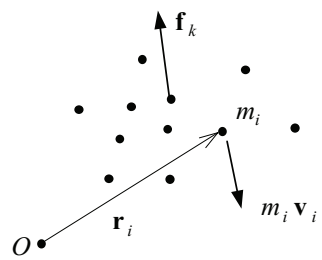


Figura 5-10

$$\mathbf{M}_i=\mathbf{r}_i\times\mathbf{f}_i=\mathbf{r}_i\times m_i\,\mathbf{a}_i=\mathbf{r}_i\times m_i\,\frac{d\,\mathbf{v}_i}{dt} \tag{5.53}$$

Extendiendo el resultado anterior al sistema discreto formado por las n partículas, tendremos que el momento resultante respecto al origen $\mathbf{M}_0$ de las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas es:

NOTA

El producto vectorial de un vector por sí mismo es nulo $(\mathbf{v}_i\times\mathbf{v}_i=\mathbf{0})$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{M}_O(t)=\displaystyle\sum_i\mathbf{r}_i\times\mathbf{f}_i=\sum_i\mathbf{r}_i\times m_i\mathbf{a}_i=\sum_i\mathbf{r}_i\times m_i\,\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}\\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\sum_i\mathbf{r}_i\times m_i\mathbf{v}_i=\sum_i\underbrace{\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}_{\mathbf{v}_i}\times m_i\mathbf{v}_i+\sum_i\mathbf{r}_i\times m_i\,\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}\\ \qquad\qquad\qquad\

La ecuación (5.54) expresa que *el momento resultante* $\mathbf{M}_O$ *de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema discreto de partículas es igual a la variación por unidad de tiempo del momento de la cantidad de movimiento* (o momento angular) $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$ *del mismo*. Este postulado recibe el nombre *de Principio de balance del momento de la cantidad de movimiento*.

Observación 5-7

Si el sistema se encuentra en equilibrio $\mathbf{M}_O(t) = \mathbf{0} \;\; \forall t$

$$\mathbf{M}_O(t) = \mathbf{0} \quad \forall t \Rightarrow \frac{d}{dt}\sum_i \mathbf{r} \times m_i \mathbf{v}_i = \frac{d\boldsymbol{\mathcal{L}}(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \sum_i \mathbf{r} \times m_i \mathbf{v}_i = \boldsymbol{\mathcal{L}} = ctte$$

y se habla entonces de la *conservación* del momento angular.

5.8.1 Forma global del principio de balance del momento angular

El resultado (5.54) puede extenderse a un sistema continuo e infinito de partículas (el medio continuo, ver Figura 5-11) como sigue:

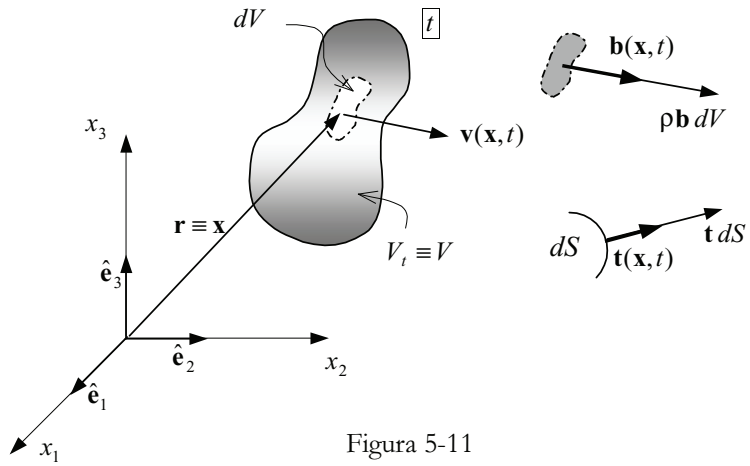


Figura 5-11

El momento angular se define como:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \int_{\mathcal{M}} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \; \underbrace{d\mathcal{M}}_{\rho\, dV} = \int_V \mathbf{r} \times \rho\, \mathbf{v}\, dV \tag{5.55}$$

y la versión continua del postulado del balance del momento angular es:

Definición:

Principio de balance del momento de la cantidad de movimiento o momento angular: el momento resultante, respecto a un cierto punto O del espacio, de todas las acciones sobre el medio continuo es igual a la variación por unidad de tiempo del momento de la cantidad de movimiento respecto a dicho punto.

$$\mathbf{M}_O(t) = \frac{d\boldsymbol{\mathcal{L}}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V_t} \mathbf{r} \times \rho\, \mathbf{v}\, dV$$

Puesto que el momento resultante de las fuerzas que actúan sobre el medio continuo (momento de las fuerzas másicas y momento de las fuerzas de superficie) tiene la expresión (ver Figura 5-11):

$$\mathbf{M}_O(t) = \int_V \mathbf{r}\times\rho\,\mathbf{b}\,dV + \int_{\partial V} \mathbf{r}\times\mathbf{t}\,dS \tag{5.56}$$

el principio de balance del momento de la cantidad de movimiento queda:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Forma global espacial del}\\ \text{principio de balance del}\\ \text{momento angular}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{d}{dt}\int_{V_t\equiv V}\mathbf{r}\times\rho\,\mathbf{v}\,dV = \int_V \mathbf{r}\times\rho\,\mathbf{b}\,dV + \int_{\partial V}\mathbf{r}\times\mathbf{t}\,dS \tag{5.57}$$

5.8.2 Forma local espacial del principio de balance del momento angular

Para obtener la forma local espacial de la ecuación de balance se procede como sigue; teniendo en cuenta el Lema de Reynolds en la ecuación (5.57):

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{V_t\equiv V}\mathbf{r}\times\rho\mathbf{v}\,dV = \frac{d}{dt}\int_{V_t\equiv V}\rho(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\,dV =\\ &= \int_V \rho\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v})dV = \int_V \rho(\underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}_{\mathbf{v}}\times\mathbf{v})\,dV + \int_V \rho(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt})\,dV = \int_V \mathbf{r}\times\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,dV\\ &\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{=\mathbf{0}}\end{aligned} \tag{5.58}$$

y desarrollando el último término de la ecuación (5.57):

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\partial V}\mathbf{r}\times\overbrace{\mathbf{t}}^{\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}\,dS = \int_{\partial V}\mathbf{r}\times\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,dS = \int_{\partial V}\mathbf{r}\times[\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}]^T\,dS = \int_{\partial V}(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\sigma}^T)\cdot\mathbf{n}\,dS =\\ \text{Teorema Diverg.}\\ \quad = \displaystyle\int_V(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\sigma}^T)\cdot\boldsymbol{\nabla}\,dV\end{array}\right. \tag{5.59}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\sigma}^T)\cdot\boldsymbol{\nabla}\right]_i \overset{simb}{=} (e_{ijk}x_j\overbrace{\sigma_{rk}}^{\sigma^T_{kr}})\dfrac{\partial}{\partial x_r} = \dfrac{\partial}{\partial x_r}(e_{ijk}x_j\sigma_{rk}) =\\ e_{ijk}\underbrace{\dfrac{\partial x_j}{\partial x_r}}_{\delta_{jr}}\sigma_{rk} + \underbrace{e_{ijk}x_j\dfrac{\partial\sigma_{rk}}{\partial x_r}}_{[\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}]_i} = \underbrace{e_{ijk}\sigma_{jk}}_{m_i} + (\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \quad i\in\{1,2,3\}\end{array}\right. \tag{5.60}$$

Substituyendo ahora la ecuación (5.60) en la (5.59):

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\partial V}\mathbf{r}\times\mathbf{t}\,dS = \int_V \mathbf{m}\,dV + \int_V(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma})dV\\ m_i = e_{ijk}\sigma_{jk} \qquad i,j,k\in\{1,2,3\}\end{array}\right. \tag{5.61}$$

y substituyendo finalmente las ecuaciones (5.58) y (5.61) en la ecuación (5.57):

$$\int_V \mathbf{r}\times\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,dV = \int_V \mathbf{r}\times\rho\mathbf{b}\,dV + \int_V \mathbf{m}\,dV + \int_V(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma})dV \tag{5.62}$$

Reordenando términos en la ecuación (5.62), se obtiene:

$$\int_V \mathbf{r}\times\underbrace{\left[\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{b}-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right]}_{=\mathbf{0}}dV+\int_V \mathbf{m}\,dV=\mathbf{0}\Rightarrow\boxed{\int_V \mathbf{m}\;dV=\mathbf{0}\qquad\forall\Delta V\subset V} \tag{5.63}$$

donde se ha tenido en cuenta que el primer integrando es nulo debido a la ecuación de Cauchy (5.52) (forma local espacial de la ecuación de balance de la cantidad de movimiento). Localizando en la ecuación (5.63) y considerando el valor de $\mathbf{m}$ en la ecuación (5.61), resulta:

$$\left.\begin{array}{ll}\mathbf{m}=\mathbf{0} & \forall\mathbf{x}\in V\\ m_i=e_{ijk}\sigma_{jk}=0 & i\in\{1,2,3\}\end{array}\right\}\Rightarrow e_{ijk}\sigma_{jk}=0\qquad i,j,k\in\{1,2,3\} \tag{5.64}$$

y particularizando la ecuación (5.64) para los tres posibles valores del índice i:

$$\left.\begin{array}{l} i=1:\; e_{1jk}\sigma_{jk}=\underbrace{e_{123}}_{=1}\sigma_{23}+\underbrace{e_{132}}_{=-1}\sigma_{32}=\sigma_{23}-\sigma_{32}=0\Rightarrow\sigma_{23}=\sigma_{32}\\ i=2:\; e_{2jk}\sigma_{jk}=\underbrace{e_{231}}_{=1}\sigma_{31}+\underbrace{e_{213}}_{=-1}\sigma_{13}=\sigma_{31}-\sigma_{13}=0\Rightarrow\sigma_{31}=\sigma_{13}\\ i=3:\; e_{3jk}\sigma_{jk}=\underbrace{e_{312}}_{=1}\sigma_{12}+\underbrace{e_{321}}_{=-1}\sigma_{21}=\sigma_{12}-\sigma_{21}=0\Rightarrow\sigma_{12}=\sigma_{21}\end{array}\right\}\Rightarrow\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^T \tag{5.65}$$

NOTA

Se identifica así la simetría del tensor de tensiones de Cauchy (enunciada, aunque no deducida, en el capítulo 4) como la *forma local espacial del principio de balance del momento angular*.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Forma local espacial del}\\ \text{principio de balance}\\ \text{del momento angular}\end{array}\right\}\rightarrow\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^T \tag{5.66}$$

y la forma local del balance del momento de la cantidad de movimiento se traduce en la simetría del tensor de tensiones de Cauchy.

5.9 Potencia

Definición:

Potencia: En mecánica clásica, y también en Mecánica de Medios Continuos, se define la *potencia* como un concepto, previo al de energía, que puede cuantificarse como la capacidad de realizar *trabajo por unidad de tiempo*. Así, para un sistema (o medio continuo) se define la potencia $W(t)$ entrante en el mismo como:

$$W(t)=\frac{\text{Trabajo realizado en el sistema}}{\text{unidad de tiempo}}$$

En algunos casos, no en todos, la potencia $W(t)$ es una diferencial exacta de una función $\mathcal{E}(t)$, la cual, en dichos casos, recibe el nombre de *Energía*.

$$W(t)=\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} \tag{5.67}$$

En nuestro caso supondremos que existen dos procedimientos por los cuales el medio continuo absorbe potencia de su exterior y realiza con ella un trabajo por unidad de tiempo:

- *Potencia mecánica*: mediante el trabajo realizado por las acciones mecánicas (fuerza másicas y superficiales) que actúan sobre el medio.
- *Potencia calorífica*: mediante la entrada de calor en el medio.

5.9.1 Potencia mecánica. Teorema de las fuerzas vivas

Definición:
Potencia mecánica entrante en el medio continuo: trabajo por unidad de tiempo realizado por todas las fuerzas (másicas y de superficie) que actúan sobre el mismo.

Consideremos el medio continuo de la Figura 5-12 sometido a la acción de unas fuerza másicas, caracterizadas por el vector de fuerzas másicas $\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$, y unas fuerzas superficiales, caracterizadas por el vector de tracción $\mathbf{t}(\mathbf{x},t)$.

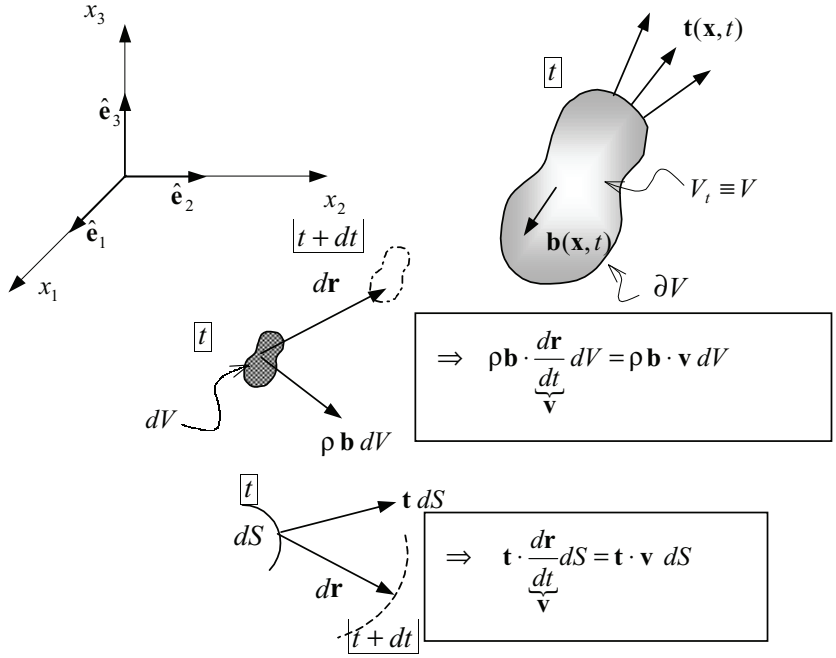


Figura 5-12

La expresión de la potencia mecánica entrante en el sistema P_e es:

$$P_e = \int_V \rho\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\,dV + \int_{\partial V} \underbrace{\mathbf{t}}_{\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{v}\,dS = \int_V \rho\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\,dV + \int_{\partial V}\mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v})\,dS \tag{5.68}$$

Aplicando el teorema de la divergencia al último término de la ecuación (5.68) se tiene:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\partial V}\mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v})\,dS = \int_V \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v})\,dV \\ \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{ij}\,\mathrm{v_j}) = \underbrace{\dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}}_{(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})_j}\mathrm{v_j} + \underbrace{\sigma_{ij}}_{\sigma_{ji}}\underbrace{\dfrac{\partial \mathrm{v_j}}{\partial x_i}}_{(\boldsymbol{l})_{ji}} = (\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{l} \end{cases} \tag{5.69}$$

y teniendo en cuenta la identidad $\boldsymbol{l} = \mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\nabla} = \mathbf{d} + \mathbf{w}$ (ver capítulo 2):

$$\boldsymbol{\sigma}: \underbrace{\boldsymbol{l}}_{\boldsymbol{l}=\mathbf{d}+\mathbf{w}} = \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{w}}_{=\mathbf{0}} = \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d} \tag{5.70}$$

RECORDATORIO

El tensor $\boldsymbol{\sigma}$ es simétrico y el tensor $\mathbf{w}$ es antisimétrico. En consecuencia su producto es nulo $(\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{w}=0)$

Substituyendo la ecuación (5.70) en la (5.69), se obtiene:

$$\boxed{\Rightarrow \int_{\partial V} \mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v})\,dS = \int_V (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{v}\,dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}\,dV} \tag{5.71}$$

NOTA

Se utiliza aquí la expresión:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) = \frac{1}{2}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}$$

Substituyendo la ecuación (5.71) en la ecuación (5.68), la potencia mecánica entrante en el medio continuo resulta ser:

$$\begin{aligned} P_e &= \int_V \rho\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\,dV + \int_{\partial V}\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}\,dS = \int_V \rho\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\,dV + \int_V (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{v}\,dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}\,dV = \\ &= \int_V \underbrace{(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \rho\,\mathbf{b})}_{\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}}\cdot\mathbf{v}\,dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}\,dV = \int_V \rho\,\underbrace{\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}}_{\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})}\,dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}\,dV = \\ &\int_V \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) + \int_V \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}\,dV = \int_V \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}\,dV \Rightarrow \end{aligned} \tag{5.72}$$

NOTACION

$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2 = \mathrm{v}^2$

y aplicando el lema de Reynolds (5.33) a la ecuación (5.72):

$$P_e = \int_V \rho\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\,dV + \int_{\partial V}\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}\,dS = \frac{d}{dt}\int_{V_t\equiv V}\frac{1}{2}\rho\mathrm{v}^2\,dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}\,dV \tag{5.73}$$

Teorema de las fuerzas vivas

$$\left.\begin{array}{l}\text{Potencia}\\ \text{mecánica}\\ \text{entrante}\end{array}\right\} \rightarrow P_e = \int_V \rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\,dV + \int_{\partial V}\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}\,dS = \underbrace{\frac{d}{dt}\int_{V_t\equiv V}\frac{1}{2}\rho\,\mathrm{v}^2\,dV}_{\mathcal{K}=\text{Energía cinética}} + \underbrace{\int_V \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}\,dV}_{\text{Potencia tensional}} \tag{5.74}$$

La ecuación (5.74) constituye la generalización a la Mecánica de Medios Continuos del Teorema de las fuerzas vivas de la Mecánica clásica:

Definición:

Teorema de las fuerzas vivas: la potencia mecánica entrante en el medio continuo:

$$P_e = \int_V \rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\,dV + \int_{\partial V}\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}\,dS$$

se invierte en:

a) modificar la energía cinética de las partículas del medio continuo:

$$\text{Energia cinética} \overset{\text{not}}{=} \mathcal{K} = \int_V \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{v}^2\,dV \Rightarrow \frac{d\mathcal{K}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{v}^2\,dV$$

b) crear potencia tensional:

$$\text{Potencia tensional} \overset{\text{def}}{=} \int_V \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}\,dV$$

Observación 5-8

A la vista de la ecuación (5.74), la potencia tensional puede definirse como aquella parte de la potencia mecánica entrante en el sistema que no se emplea en hacer variar la energía cinética. Puede interpretarse como *el trabajo por unidad de tiempo* (potencia) realizado por las tensiones en el proceso de deformación del medio.

En un sólido rígido no hay deformación ni velocidad de deformación ($\mathbf{d}=\mathbf{0}$). En consecuencia, las tensiones no realizan trabajo mecánico y la potencia tensional es nula. En éste caso toda la potencia mecánica entrante en el sistema se invierte en hacer variar la energía cinética del mismo y se recobra le Teorema de las fuerzas vivas de la Mecánica del sólido rígido.

5.9.2 Potencia calorífica

Definición:

Potencia calorífica entrante Q_e*:* es la cantidad de calor que entra, por unidad de tiempo, en el medio continuo.

Dicha entrada de calor puede ser debida a dos causas fundamentales:

a) la entrada de calor debida al flujo (*no convectivo*) de calor a través del contorno del correspondiente volumen material. Nótese que, al tratarse de un volumen material, el flujo de calor por transporte de masa (convectivo) es nulo y, por lo tanto, todo el flujo de calor entrante será no convectivo,

b) la existencia de *fuentes de calor* en el interior del medio continuo.

- *Flujo de calor no convectivo*

Sea $\mathbf{q}(\mathbf{x},t)$ la descripción espacial del vector de flujo no convectivo de calor por unidad de superficie. Entonces, el flujo neto no convectivo de calor a través del contorno del volumen material será (ver Figura 5-13):

$$\begin{aligned}\int_{\partial V}\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \frac{\text{Cantidad de calor saliente}}{\text{unidad de tiempo}}\\ -\int_{\partial V}\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \frac{\text{Cantidad de calor entrante}}{\text{unidad de tiempo}}\end{aligned} \tag{5.75}$$

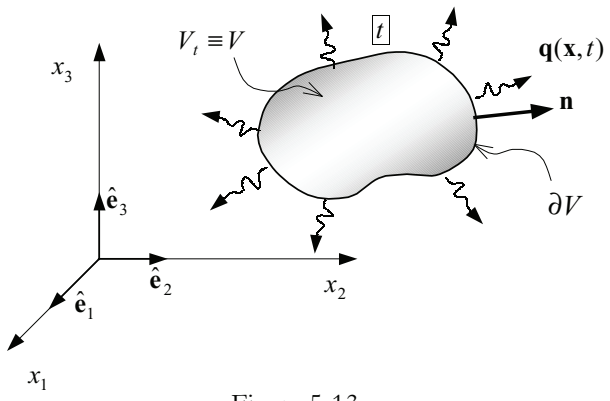


Figura 5-13

Observación 5-9

Un ejemplo típico de flujo no convectivo es la transmisión de calor por fenómenos de *conducción*. La conducción de calor está gobernada por la *Ley de Fourier,* que proporciona el vector de flujo de calor por conducción (no convectivo) $\mathbf{q}(\mathbf{x},t)$ en función de la temperatura $\theta(\mathbf{x},t)$:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ley de Fourier}\\ \text{de conducción}\\ \text{del calor}\end{array}\right\} \rightarrow \quad \mathbf{q}(\mathbf{x},t) = -K\,\nabla\theta(\mathbf{x},t)$$

donde K es la conductividad térmica (una propiedad del material).

- *Fuentes internas de calor*

En el interior del medio continuo puede generarse (o absorberse) calor debido a ciertos fenómenos (reacciones químicas, etc.). Sea $r(\mathbf{x},t)$ una función escalar que describe en forma espacial el calor generado por las fuentes internas por unidad de masa y unidad de tiempo (ver Figura 5-14). El calor entrante en el sistema, por unidad de tiempo, debido a la existencia de fuentes internas de calor será:

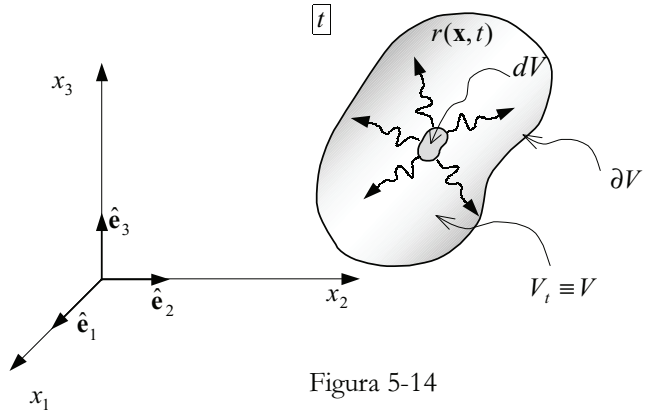


Figura 5-14

$$\int_V \rho\, r\, dV = \frac{\text{Calor generado por la fuente interna}}{\text{unidad de tiempo}} \tag{5.76}$$

En consecuencia, el calor total entrante por unidad de tiempo en el medio continuo (o potencia calorífica Q_e) vendrá dado como la suma de las contribuciones del flujo por conducción (5.75) y de las fuentes internas (5.76):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Potencia calorífica}\\ \text{entrante en el medio}:\end{array}\right\} \quad Q_e = \int_V \rho\, r\, dV - \int_{\partial V} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\, dS \tag{5.77}$$

y, a la vista de las ecuaciones (5.74) y (5.77), la potencia total entrante en el medio continuo puede escribirse como:

Potencia total entrante en el sistema:

$$P_e + Q_e = \frac{d}{dt}\int_{V_t\equiv V} \frac{1}{2}\rho \mathrm{v}^2 dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}\, dV + \int_V \rho\, r\, dV - \int_{\partial V} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\, dS \tag{5.78}$$

5.10 Balance de la energía

5.10.1 Conceptos de termodinámica

- *Sistema termodinámico*: es una determinada cantidad de materia continua formada siempre por las mismas partículas (en nuestro caso un volumen material).

- *Variables termodinámicas*: conjunto de variables macroscópicas que caracterizan el sistema e intervienen en todos los procesos físicos a estudiar. Se designarán por $\mu_i(\mathbf{x},t) \quad i\in\{1,2,\ldots,n\}$.

- *Variables de estado, independientes o libres*: es un subconjunto del grupo de variables termodinámicas en función de las cuales se pueden expresar todas las demás.

- *Estados termodinámicos*: un estado termodinámico queda definido al asignar un cierto valor a las variables de estado y, por lo tanto, a todas las variables termodinámicas. En un hiperespacio (espacio termodinámico) definido por las variables termodinámicas $\mu_i \quad i\in\{1,2,\ldots,n\}$ (ver Figura 5-15), un estado termodinámico vendría representado por un punto.

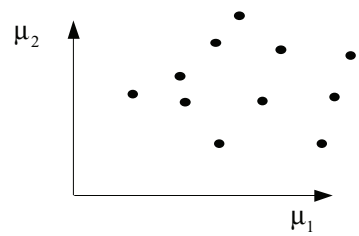


Figura 5-15 – Espacio termodinámico

- *Procesos termodinámicos:* la sucesión continua de estados termodinámicos por los que pasa el sistema entre dos instantes de tiempo t_A y t_B (es un camino o segmento continuo en el espacio termodinámico, ver Figura 5-16).

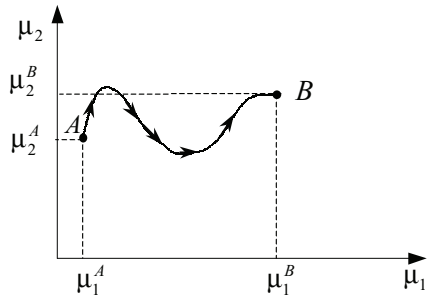


Figura 5-16 - Proceso termodinámico

- *Ciclo cerrado:* proceso termodinámico en el que el estado termodinámico final coincide con el estado termodinámico inicial (todas las variables termodinámicas recuperan su valor inicial), ver Figura 5-17.

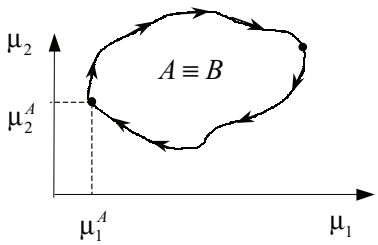


Figura 5-17 - Ciclo cerrado

- *Función de estado:* toda función escalar, vectorial o tensorial $\phi(\mu_1 \ldots \mu_n)$ de las variables termodinámicas que se puede escribir unívocamente en función de las mismas.

NOTA

La descripción matemática de una función $\phi(\mu_1,..,\mu_n)$ de las variables termodinámicas mediante una forma diferencial $\delta\phi$ es un hecho muy común en termodinámica de medios continuos.

Consideremos un espacio termodinámico con variables termodinámicas $\mu_i(\mathbf{x},t) \quad i \in \{1,2,\ldots,n\}$ y una función $\phi(\mu_1,....,\mu_n)$ de dichas variables termodinámicas definida implícitamente mediante una forma diferencial:

$$\delta\phi = f_1(\mu_1,\ldots,\mu_n)d\mu_1 + \ldots + f_n(\mu_1,\ldots,\mu_n)\,d\mu_n \tag{5.79}$$

Consideremos también un determinado proceso termodinámico $A \to B$ en el espacio de las variable termodinámicas. La ecuación (5.79) proporciona el valor de la función $\phi(\mu_1^B,....,\mu_n^B) \overset{not}{=} \phi_B$ conocido su valor $\phi(\mu_1^A,....,\mu_n^A) \overset{not}{=} \phi_A$ y el correspondiente camino (proceso termodinámico) $A \to B$ mediante:

$$\phi_B = \phi_A + \int_A^B \delta\phi \tag{5.80}$$

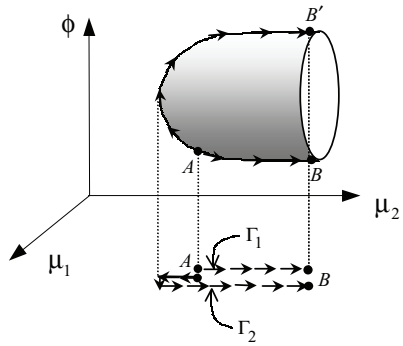


Figura 5-18. Función no unívoca de las variables termodinámicas μ_1,μ_2

Sin embargo la ecuación (5.80) no garantiza que el resultado ϕ_B sea independiente del camino (proceso termodinámico) seguido. En términos matemáticos, no garantiza que la función $\phi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida mediante (5.80) sea unívoca (ver Figura 5-18) y que, por lo tanto, exista una sola imagen $\phi(\mu_1,....,\mu_n)$ para cada punto del espacio termodinámico (ver Figura 5-18).

Observación 5-10

Para que una función $\phi(\mu_1,....\mu_n)$, descrita implícitamente mediante una forma diferencial $\delta\phi$, sea una *función de estado* (es decir unívoca), dicha forma diferencial tiene que ser una *diferencial exacta* $\delta\phi = d\phi$. En otras palabras la forma diferencial $\delta\phi$ tiene que ser integrable.

La condición necesaria y suficiente para que una forma diferencial como la (5.79) sea una diferencial exacta es la igualdad de derivadas cruzadas:

$$\left.\begin{aligned} &\delta\phi = f_1(\mu_1,\ldots,\mu_n)d\mu_1 + \ldots + f_n(\mu_1,\ldots,\mu_n)d\mu_n \\ &\frac{\partial f_i(\mu_1,\ldots,\mu_n)}{\partial \mu_j} = \frac{\partial f_j(\mu_1,\ldots,\mu_n)}{\partial \mu_i} \quad \forall i,j \in \{1,...n\} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \delta\phi = d\phi$$

Si la forma diferencial (5.79) es una diferencial exacta, la ecuación (5.80) queda:

$$\phi_B = \phi_A + \int_A^B d\phi = \phi_A + [\Delta\phi]_A^B \tag{5.81}$$

y el valor ϕ_B es independiente del camino de integración. Diremos entonces que la función ϕ es una *función de estado que depende únicamente de los valores de las variables de estado* y no del proceso termodinámico.

Observación 5-11

Si ϕ es una función de estado, entonces $\delta\phi$ es una diferencial exacta y la integral a lo largo de todo ciclo cerrado de la diferencial $\delta\phi$ será nula:

$$\int_A^A \delta\phi = \oint d\phi = \underbrace{\left[\Delta\phi\right]_A^A}_{0} = 0$$

Ejemplo 5-3 – *Determinar si la función* $\phi(\mu_1,\mu_2)$ *definida a partir de la forma diferencial* $\delta\phi = 4\mu_2 d\mu_1 + \mu_1 d\mu_2$ *puede ser una función de estado.*

Resolución:
De acuerdo con la ecuación (5.79):

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \equiv 4\mu_2 \\ f_2 \equiv \mu_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_1}{\partial \mu_2} = 4 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial \mu_1} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial \mu_2} \neq \frac{\partial f_2}{\partial \mu_1}$$

luego $\delta\phi$ *no es una diferencial exacta* (ver Observación 5-10) y ϕ no es una función de estado.

5.10.2 Primer principio de la termodinámica

La experiencia demuestra que la potencia mecánica (5.74) no es una diferencial exacta y que, por lo tanto, el trabajo mecánico desarrollado por el sistema en un ciclo cerrado no es igual a cero. Lo mismo ocurre con la potencia calorífica (5.77).

$$\left.\begin{array}{l} \delta\phi_1 = P_e\ dt \Rightarrow \oint P_e\ dt \neq 0 \\ \delta\phi_2 = Q_e\ dt \Rightarrow \oint Q_e\ dt \neq 0 \end{array}\right\} \tag{5.82}$$

Sin embargo, existe evidencia experimental de que la suma de la potencia mecánica más la potencia calorífica, es decir la potencia total entrante en el sistema (5.78) (ver Figura 5-19), es efectivamente una diferencial exacta y que, por lo tanto, puede definirse a partir de ella una *función de estado* $\mathcal{E}$ que corresponderá al concepto de energía:

$$P_e\ dt + Q_e\ dt = d\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E}(t) = \int_{t_0}^{t} (P_e + Q_e)\ dt + ctte. \tag{5.83}$$

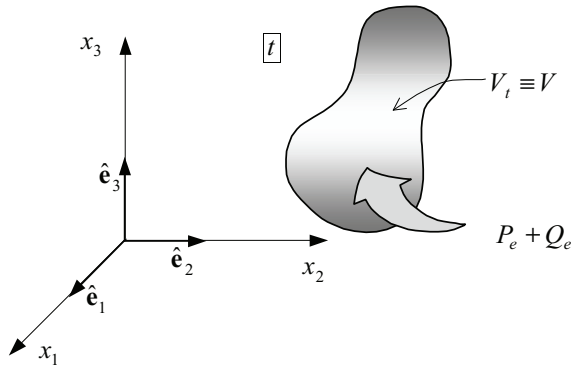


Figura 5-19

El *primer principio de la termodinámica* establece los siguientes postulados:

1) Existe una *función de estado* $\mathcal{E}$, denominada *energía total del sistema*, tal que su variación por unidad de tiempo es igual a la suma de la potencia mecánica más la potencia calorífica entrantes en el sistema:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= P_e + Q_e \\ \underbrace{d\mathcal{E}}_{\text{Variación de la energía total}} &= \underbrace{P_e dt}_{\text{Trabajo mecánico}} + \underbrace{Q_e dt}_{\text{Trabajo calorífico}} \end{aligned}} \tag{5.84}$$

2) Existe otra *función de estado* $\mathcal{U}$ *denominada energía interna* tal que:

a) es una propiedad de *carácter extensivo*. En este caso se puede definir una *energía interna específica* $u(\mathbf{x},t)$ (o energía interna por unidad de masa) tal que:

$$\boxed{\mathcal{U} = \int_V \rho\, u\, dV} \tag{5.85}$$

b) la variación de la energía total del sistema $\mathcal{E}$ es igual a la variación de la energía interna $\mathcal{U}$ más la variación de la energía cinética $\mathcal{K}$:

$$\boxed{\underbrace{d\mathcal{E}}_{\text{Función de estado}} = d\mathcal{K} + \underbrace{d\mathcal{U}}_{\text{Función de estado}}} \tag{5.86}$$

NOTA

Se dice que una cierta propiedad es extensiva si el *contenido de la propiedad en el todo es la suma del contenido de la propiedad en cada una de las partes*. El carácter extensivo de un propiedad permite definir el contenido de la propiedad por unidad de masa (*valor específico de la propiedad*) o por unidad de volumen (*densidad de la propiedad*).

Observación 5-12

Nótese que, puesto que se ha postulado que la energía total del sistema $\mathcal{E}$ y la energía interna $\mathcal{U}$ son funciones de estado, $d\mathcal{E}$ y $d\mathcal{U}$ en la ecuación (5.86) son diferenciales exactas. En consecuencia $d\mathcal{K} = d\mathcal{E} - d\mathcal{U}$, en dicha ecuación, también es diferencial exacta (puesto que la diferencia entre dos diferenciales exactas también lo es) y, por tanto, es una función de estado. Se puede pues afirmar que la ecuación (5.86) postula indirectamente el carácter de función de estado (y por tanto) de *energía* de $\mathcal{K}$.

A partir de la ecuación (5.84) y considerando la ecuación (5.78), se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = P_e + Q_e = \frac{d}{dt}\int_{V_t \equiv V} \frac{1}{2}\rho \mathsf{v}^2 dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}\, dV + \int_V \rho\, r\, dV - \int_{\partial V} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\, dS \\ \mathcal{K} = \int_V \frac{1}{2}\rho \mathsf{v}^2 dV \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tag{5.87}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\mathcal{K}}{dt} + \frac{d\mathcal{U}}{dt} = \underbrace{\frac{d}{dt}\int_{V_t \equiv V} \frac{1}{2}\rho \mathsf{v}^2 dV}_{\frac{d\mathcal{K}}{dt}} + \underbrace{\int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}\, dV + \int_V \rho\, \mathsf{r}\, dV - \int_{\partial V} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\, dS}_{\frac{d\mathcal{U}}{dt}} \Rightarrow$$

Forma global del balance de energía interna $\rightarrow$

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V_t \equiv V} \rho\, u\, dV = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}\, dV + \int_V \rho\, \mathsf{r}\, dV - \int_{\partial V} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\, dS \tag{5.88}$$

Observación 5-13

De la ecuación (5.88) se desprende que toda variación, por unidad de tiempo, de la energía interna $\frac{d\mathcal{U}}{dt}$ viene producida por:

- una generación de potencia tensional : $\int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}\, dV$
- una variación, por unidad de tiempo, del contenido de calor del medio:

$$\int_V \rho\, r\, dV - \int_{\partial V} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

Aplicando el lema de Reynolds (5.33) y el teorema de la divergencia a la ecuación (5.88) se tiene:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t \equiv V} \rho\, u\, dV = \int_V \rho \frac{du}{dt} dV = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}\, dV + \int_V \rho\, r\, dV - \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q}\, dV \quad \forall \Delta V \subset V \tag{5.89}$$

Finalmente, localizando en la ecuación (5.89), se obtiene *la forma local espacial del balance de la energía*:

Forma local espacial del balance de energía (ecuación de la energía) $\rightarrow$

$$\rho \frac{du}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + (\rho\, r - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \forall t \tag{5.90}$$

5.11 Procesos reversibles e irreversibles

NOTA

Sistema termodinámico aislado: es un sistema que no puede intercambiar energía con el exterior. En un sentido estricto el único sistema perfectamente aislado es el universo, aunque podemos pensar en sistemas más pequeños quasi-aislados o aislados de forma imperfecta.

El primer principio de la termodinámica conduce a una ecuación de balance de la energía que debe cumplirse para todos los procesos físicos que se producen en la realidad:

$$P_e + Q_e = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\mathcal{U}}{dt} + \frac{d\mathcal{K}}{dt} \tag{5.91}$$

En particular, si consideramos un *sistema aislado* (un sistema que no puede intercambiar energía con el exterior), la variación temporal de la energía total del sistema será nula ($\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0 \Rightarrow$ la energía total se conserva) y, por lo tanto, la ecuación de balance de la energía (5.91), establecida por el primer principio de la termodinámica, impone que toda variación de energía interna $\frac{d\mathcal{U}}{dt}$ se tiene que compensar con una variación igual y de signo contrario de energía cinética $\frac{d\mathcal{K}}{dt}$ y viceversa (ver Figura 5-20).

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0 = \frac{d\mathcal{U}}{dt} + \frac{d\mathcal{K}}{dt}$$

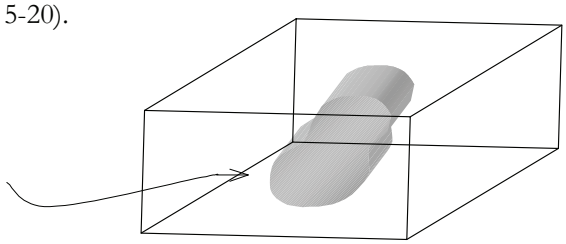


Figura 5-20 – Sistema termodinámico aislado

Lo que no dice el primer principio de la termodinámica es si este intercambio de energías (cinética e interna) en un sistema aislado puede producirse indistintamente en cualquier sentido ($\frac{d\mathcal{U}}{dt} = -\frac{d\mathcal{K}}{dt} > 0$, o bien, $\frac{d\mathcal{U}}{dt} = -\frac{d\mathcal{K}}{dt} < 0$). Es decir, no establece ninguna restricción que indique si un proceso arbitrario e imaginario que implique un intercambio de energía en un determinado sentido es físicamente posible o no. Lo único que establece es la satisfacción del balance de energía (5.91) en el caso de que el proceso se produzca.

Sin embargo, la experiencia demuestra que, ciertos procesos que podrían ser imaginados teóricamente, nunca se producen en la realidad. Supongamos, por ejemplo, el sistema aislado de la Figura 5-21 constituido por:

- una rueda rígida (no deformable) que gira con velocidad angular ω,
- un freno que puede ser aplicado sobre la rueda en un cierto instante.

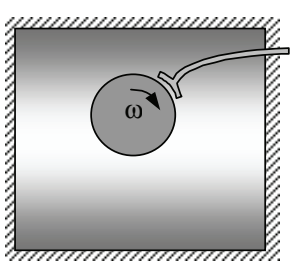


Figura 5-21

Consideremos ahora los siguientes dos procesos:

NOTA

Al tratarse de un medio no deformable la potencia tensional es nula (ver Observación 5-8) y toda variación de la energía interna del sistema derivará de una variación de su contenido de calor (ver Observación 5-13).

1) En un cierto instante el freno actúa, la velocidad de giro de la rueda, ω, disminuye y por lo tanto disminuye su energía cinética ($d\mathcal{K} < 0$). Por otra parte, debido al rozamiento entre el freno y la rueda, se generará calor produciéndose un aumento de la energía interna ($d\mathcal{U} > 0$). La experiencia demuestra que este proceso, en el que aumenta la energía interna a costa de disminuir la energía cinética, puede darse en la realidad y que, por lo tanto, es un proceso *físicamente factible.*

2) Manteniendo el freno sin aplicar, en un cierto instante la rueda aumenta espontáneamente su velocidad de giro ω y por lo tanto aumenta su energía cinética ($d\mathcal{K} > 0$). De acuerdo con el primer principio disminuirá la energía interna del sistema ($d\mathcal{U} < 0$). Sin embargo, la experiencia demuestra que *nunca* se produce este aumento (espontáneo) de la velocidad de la rueda ni la consiguiente disminución de la cantidad de calor del sistema (que se reflejaría en una disminución de su temperatura).

La conclusión ante esta observación es que *el segundo proceso considerado en el ejemplo no es un proceso físico factible.* Más generalmente, para el sistema considerado solo son factibles procesos termodinámicos que tiendan a aumentar la energía interna y a disminuir la energía cinética y no lo contrario.

Concluimos, pues, que *solo cuando un determinado proceso físico es factible el primer principio es aplicable,* y se advierte la necesidad de determinar cuándo un determinado proceso físico es factible o si un proceso físico es factible en una dirección, en ambas o en ninguna. La respuesta a esta cuestión la proporciona el *segundo principio de la termodinámica.*

Las anteriores consideraciones llevan a clasificar, desde un punto de vista termodinámico, los posibles procesos físicos en *procesos factibles o no factibles* y, además, sugieren clasificar los procesos factibles en *procesos reversibles y procesos irreversibles.*

Definiciones

Proceso reversible: un proceso termodinámico $A \to B$ es reversible si es posible volver desde el estado termodinámico final B al estado termodinámico inicial A, por el mismo camino (ver Figura 5-22).

Proceso irreversible: un proceso termodinámico $A \to B$ es irreversible si no es posible volver desde el estado termodinámico final B al estado termodinámico inicial A, *por el mismo camino* (aunque pueda volverse al mismo por un camino distinto, ver Figura 5-22).

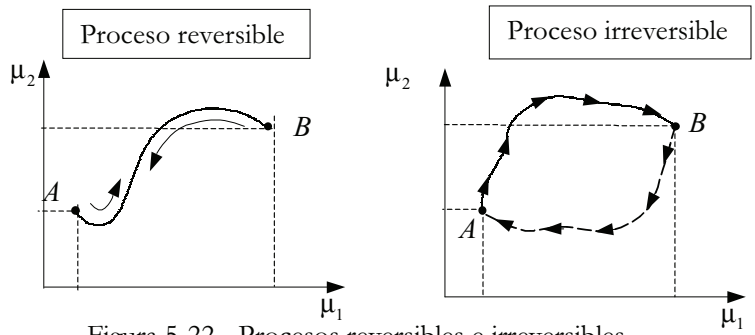


Figura 5-22 - Procesos reversibles e irreversibles

En general dentro de un mismo proceso termodinámico existirán tramos reversibles y tramos irreversibles.

5.12 Segundo principio de la termodinámica. Entropía

5.12.1 Segundo principio de la termodinámica. Forma global

El segundo principio de la termodinámica establece los siguientes dos postulados:

NOTA

Se dice que una cierta propiedad es intensiva si el *contenido de las propiedad en el todo no es la suma del contenido de la propiedad en cada una de las partes*. Al contrario de lo que ocurre con propiedades extensivas, en este caso no se puede definir el contenido de la propiedad por unidad de masa (*valor específico de la propiedad*) o por unidad de volumen (*densidad de la propiedad*). La temperatura es un ejemplo paradigmático de propiedad intensiva.

1) Existe una función de estado denominada *temperatura absoluta* $\theta(\mathbf{x},t)$ que es intensiva y estrictamente positiva ($\theta > 0$).

2) Existe una función de estado denominada *entropía* S con las siguientes características:

   a) Es una variable *extensiva* (el contenido de la entropía en el todo es la suma del contenido en las partes). Esto implica que existe una entropía específica (entropía por unidad de masa) s tal que:

$$\mathrm{s} = \frac{\text{entropía}}{\text{unidad de masa}} \quad \rightarrow \quad S = \int_V \rho\, s\, dV \tag{5.92}$$

   b) Se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Forma integral}\\ \text{del segundo}\\ \text{principio de la}\\ \text{termodinám ica}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V_t \equiv V} \rho\, s\, dV \geq \int_V \rho \frac{r}{\theta} dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q}}{\theta}\cdot \mathbf{n}\, dS \tag{5.93}$$

donde :

- el signo = corresponde a procesos *reversibles*.
- el signo > corresponde a procesos *irreversibles*.
- el signo < no puede darse e indica que el correspondiente proceso es *no factible*

5.12.2 Interpretación física del segundo principio de la termodinámica

En el apartado 5.9.2 se vio que la magnitud *calor en el sistema* viene caracterizada por:

a) un término de fuente (o de generación de calor por unidad de masa y de tiempo) $r(\mathbf{x},t)$, definido en el interior del volumen material y
b) el flujo no convectivo (flujo de calor por conducción) a través del contorno de la superficie material, definido mediante un vector de flujo no convectivo por unidad de superficie $\mathbf{q}(\mathbf{x},t)$.

Con estos términos puede calcularse la cantidad de calor que entra por unidad de tiempo en un volumen material V_t, que ocupa instantáneamente el volumen del espacio $V_t \equiv V$ de normal exterior $\mathbf{n}$, como:

$$\boxed{Q_e = \int_V \rho\, r\, dV - \int_{\partial V} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\, dS} \tag{5.94}$$

Consideremos ahora una nueva magnitud definida *como calor por unidad de temperatura absoluta* en el sistema. Si $\theta(\mathbf{x},t)$ es la temperatura absoluta, la cantidad de dicha magnitud vendrá caracterizada por:

a) un término de fuente $\frac{r}{\theta}$ correspondiente a la generación de *calor por unidad de temperatura absoluta*, por unidad de masa y unidad de tiempo, y
b) un vector $\frac{\mathbf{q}}{\theta}$ de flujo no convectivo de *calor por unidad de temperatura absoluta.*

Magnitud	Término de fuente	Vector de flujo no convectivo
$\frac{\text{Calor}}{\text{unidad de tiempo}}$	r	$\mathbf{q}$
$\frac{\text{Calor / u. de temperatura absoluta}}{\text{unidad de tiempo}}$	$\frac{r}{\theta}$	$\frac{\mathbf{q}}{\theta}$

De forma paralela a la ecuación (5.94) los nuevos términos fuente, $\frac{r}{\theta}$, y vector de flujo no convectivo, $\frac{\mathbf{q}}{\theta}$, permiten calcular la cantidad de *calor por unidad de temperatura absoluta* que entra en el volumen material por unidad de tiempo como:

$$\boxed{\frac{(\text{Calor/u. de temperatura}) \text{ que entra en } V}{\text{unidad de tiempo}} = \int_V \rho \frac{r}{\theta}\, dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q}}{\theta}\cdot\mathbf{n}\, dS} \tag{5.95}$$

Observando ahora la ecuación (5.95), vemos que el segundo término de la misma corresponde precisamente a la magnitud definida en la ecuación (5.93). Esta circunstancia permite interpretar el segundo principio estableciendo que *la generación de entropía, por unidad de tiempo, en un medio continuo siempre es mayor o*

igual que la cantidad de calor por unidad temperatura que entra en el sistema por unidad de tiempo

$$\left.\begin{array}{l}\text{Forma global}\\ \text{del segundo principio}\\ \text{de la termodinámica}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{dS}{dt} \geq \underbrace{\int_V \rho \frac{r}{\theta} dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n}\ dS}_{\begin{array}{l}\text{Cantidad de la propiedad}\\ \text{"}\textit{Calor /u. de temperatura absoluta}\text{"}\\ \text{que entra en el dominio } V \text{ por}\\ \text{unidad de tiempo.}\end{array}} \tag{5.96}$$

Consideremos ahora la descomposición de la entropía total del sistema S en dos componentes diferenciadas:

- $S^{(i)}$: *entropía generada* (producida) *interiormente por el medio continuo*. Su tasa de generación temporal es $\frac{dS^{(i)}}{dt}$,
- $S^{(e)}$: *entropía generada por interacción del medio continuo con su exterior*. Su tasa de variación temporal es $\frac{dS^{(e)}}{dt}$,

cumpliéndose naturalmente:

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{dS^{(e)}}{dt} + \frac{dS^{(i)}}{dt}} \tag{5.97}$$

Si se establece ahora que la variación temporal de la entropía generada por interacción con el exterior *coincide* con la de la magnitud *calor por unidad de temperatura absoluta,* de la ecuación (5.94) puede escribirse:

$$\boxed{\frac{dS^{(e)}}{dt} = \int_V \rho \frac{r}{\theta} dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n}\, dS} \tag{5.98}$$

y, teniendo en cuenta las ecuaciones (5.96) a (5.98) la variación por unidad de tiempo de la entropía generada internamente será:

$$\boxed{\frac{dS^{(i)}}{dt} = \frac{dS}{dt} - \frac{dS^{(e)}}{dt} = \frac{dS}{dt} - \left[\int_V \rho \frac{r}{\theta} dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n}\, dS\right] \geq 0} \tag{5.99}$$

Observación 5-14

Según la ecuación (5.99), la entropía de generación interna $S^{(i)}$ del sistema (medio continuo) siempre aumenta ($\frac{dS^{(i)}}{dt} \geq 0$). En un sistema perfectamente aislado (estrictamente hablando, solo la totalidad del universo lo es) no hay interacción con el exterior y la variación de entropía por interacción con el exterior es nula ($\frac{dS^{(e)}}{dt} = 0$). En este caso, el segundo principio establece que $\frac{dS^{(i)}}{dt} = \frac{dS}{dt} \geq 0$, es decir, que *la entropía total de un sistema perfectamente aislado siempre aumenta*. Este es el punto de partida de algunas formulaciones alternativas del segundo principio de la termodinámica.

5.12.3 Reformulación del segundo principio de la termodinámica

A la vista de las consideraciones del apartado 5.12.2 podemos reformular el segundo principio en los siguientes términos:

1) Existe una función de estado denominada temperatura absoluta tal que siempre es estrictamente positiva:

$$\theta(\mathbf{x},t) > 0 \tag{5.100}$$

2) Existe una función de estado denominada entropía que es una variable extensiva y que por lo tanto puede definirse en función de una entropía específica (o entropía por unidad de masa) $s(\mathbf{x},t)$ como:

$$S(t) = \int_V \rho\, s\, dV \tag{5.101}$$

3) La entropía puede ser de generación interna, $S^{(i)}$, o producida por interacción con el exterior, $S^{(e)}$. Ambas componentes de la entropía son variables extensivas y su contenido en un volumen material V puede definirse en función de sus respectivos valores específicos $s^{(i)}$ y $s^{(e)}$:

$$\begin{aligned} S^{(i)} &= \int_V \rho\, s^{(i)} dV \\ S^{(e)} &= \int_V \rho\, s^{(e)} dV \end{aligned} \tag{5.102}$$

$$S = S^{(i)} + S^{(e)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{dt} = \frac{dS^{(i)}}{dt} + \frac{dS^{(e)}}{dt} \tag{5.103}$$

y utilizando el Lema de Reynolds (5.33) en las ecuación (5.103):

$$\begin{aligned} \frac{dS^{(i)}}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_{V_t \equiv V} \rho\, s^{(i)} dV = \int_V \rho \frac{ds^{(i)}}{dt} dV \\ \frac{dS^{(e)}}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_{V_t \equiv V} \rho\, s^{(e)} dV = \int_V \rho \frac{ds^{(e)}}{dt} dV \end{aligned} \tag{5.104}$$

4) La variación de entropía externa (generada por interacción con el exterior) está asociada a la variación de la magnitud *calor por unidad de temperatura absoluta*, y se define como:

$$\frac{dS^{(e)}}{dt} = \int_V \rho \frac{r}{\theta} dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{5.105}$$

5) *La entropía de generación interna no disminuye nunca*. En función de la variación de su contenido durante un proceso termodinámico se definen las siguientes situaciones:

$$\frac{dS^{(i)}}{dt} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} = 0 & \text{proceso reversible} \\ > 0 & \text{proceso irreversible} \\ < 0 & \text{proceso no factible} \end{cases} \tag{5.106}$$

5.12.4 Forma local del segundo principio de la termodinámica. Ecuación de Clausius-Plank

Utilizando las ecuaciones (5.102) a (5.105), la ecuación (5.106) se reescribe como:

$$\begin{aligned} \frac{dS^{(i)}}{dt} &= \frac{dS}{dt} - \frac{dS^{(e)}}{dt} \geq 0 \\ \frac{d}{dt}\int_{V_t \equiv V} \rho\, s^{(i)}\, dV &= \frac{d}{dt}\int_{V_t \equiv V} \rho\, s\, dV - \left[\int_V \rho \frac{r}{\theta}\, dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q}}{\theta}\cdot \mathbf{n}\, d\Gamma\right] \geq 0 \end{aligned} \tag{5.107}$$

Aplicando el lema de Reynolds (para la primera y segunda integral del término de la izquierda de la ecuación (5.107)) y el teorema de la divergencia (en la última integral), se obtiene:

$$\int_V \rho \frac{ds^{(i)}}{dt}\, dV = \int_V \rho \frac{ds}{dt}\, dV - \left[\int_V \rho \frac{r}{\theta}\, dV - \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) dV\right] \geq 0 \quad \forall \Delta V \subset V \tag{5.108}$$

y localizando en la ecuación (5.108), se llega a la forma local del segundo principio de la termodinámica o ecuación de Clausius-Duhem:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Forma local del}\\ \text{segundo principio}\\ \text{de la termodinámica}\\ \text{(desigualdad de}\\ \text{Clausius - Duhem)}\end{array}\right\} \rightarrow \quad \rho \frac{ds^{(i)}}{dt} = \rho \frac{ds}{dt} - \left(\rho \frac{r}{\theta} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right)\right) \geq 0 \qquad \begin{array}{l}\forall \mathbf{x} \in V\\ \forall t\end{array} \tag{5.109}$$

Donde, de nuevo, en la ecuación (5.109) el signo:

= corresponde a procesos *reversibles,*
> corresponde a procesos *irreversibles,*
< indica que el correspondiente proceso es *no factible.*

La ecuación (5.109) es susceptible de ser reelaborada como sigue:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) &= \frac{1}{\theta}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2}\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta \\ \rho \underbrace{\frac{ds^{(i)}}{dt}}_{\overset{not}{=} \dot{s}^{(i)}} &= \rho \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\overset{not}{=} \dot{s}} - \rho\frac{r}{\theta} + \frac{1}{\theta}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2}\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tag{5.110}$$

$$\boxed{\dot{s}^{(i)} = \underbrace{\dot{s} - \frac{r}{\theta} + \frac{1}{\rho\theta}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q}}_{\dot{s}^{(i)}_{local}} \quad \underbrace{-\frac{1}{\rho\theta^2}\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta \geq 0}_{\dot{s}^{(i)}_{cond}}} \tag{5.111}$$

Una formulación más fuerte (más restrictiva) del segundo principio de la termodinámica postula que la entropía generada internamente, $\dot{s}^{(i)}$, puede generarse localmente, $\dot{s}^{(i)}_{local}$, o por conducción térmica, $\dot{s}^{(i)}_{cond}$, y que ambas contribuciones a la generación de entropía deben ser no negativas:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Generación interna}\\ \text{local de entropía :}\\ \text{(desigualdad de Clausius - Plank)}\end{array}\right\} \rightarrow \dot{s}_{local}^{(i)} = \dot{s} - \frac{r}{\theta} + \frac{1}{\rho\theta}\nabla\cdot\mathbf{q} \geq 0 \qquad (5.112)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Generación interna}\\ \text{de entropía por}\\ \text{conducción de calor}\end{array}\right\} \rightarrow \dot{s}_{cond}^{(i)} = -\frac{1}{\rho\theta^2}\mathbf{q}\cdot\nabla\theta \geq 0 \qquad (5.113)$$

Observación 5-15

La ecuación (5.113) puede ser interpretada de la siguiente manera: puesto que la densidad, ρ, y la temperatura absoluta, θ, son magnitudes positivas, dicha ecuación puede escribirse:

$$\boxed{\mathbf{q}\cdot\nabla\theta \leq 0}$$

que establece que el flujo no convectivo de calor, $\mathbf{q}$, y el gradiente de temperatura, $\nabla\theta$, son vectores que tienen sentidos opuestos (su producto escalar es negativo). En otras palabras, la ecuación (5.113) es la expresión matemática del hecho, experimentalmente contrastado, de *que el calor fluye por conducción de las partes más calientes del medio a las más frías* (ver Figura 5-23), caracterizando como *no factibles* aquellos procesos en los que ocurra lo contrario.

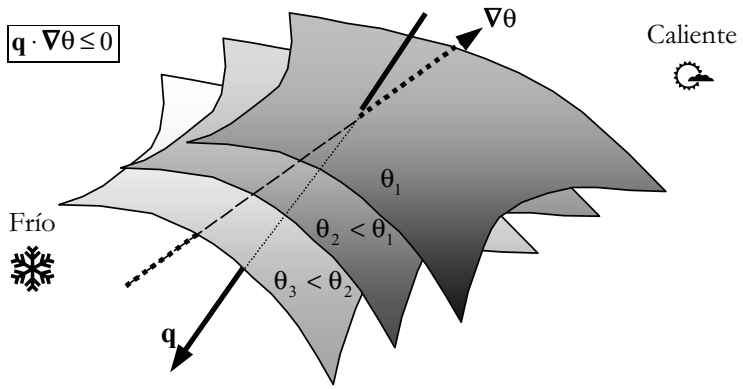


Figura 5-23 – Flujo de calor opuesto al gradiente térmico

Observación 5-16

En el contexto de la Ley de Fourier de conducción del calor: $\mathbf{q} = -K\nabla\theta$ (ver Observación 5-9) la ecuación (5.113) puede escribirse:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{q}\cdot\nabla\theta \leq 0\\ \mathbf{q} = -K\nabla\theta\end{array}\right\} \Rightarrow -K\left|\nabla\theta\right|^2 \leq 0 \;\Rightarrow \boxed{K \geq 0}$$

poniendo de manifiesto la carencia de sentido físico de valores negativos de la conductividad térmica K.

5.12.5 Formas alternativas del segundo principio de la termodinámica

En mecánica de medios continuos suelen utilizarse expresiones alternativas de la ecuación de Clausius-Plank (5.112) combinándola con la forma local de la ecuación de balance de la energía (5.90).

- *Ecuación de Clausius-Plank en función de la energía interna específica.*

Una forma usual de expresar la ecuación de Clausius-Plank es hacerlo en función de la energía interna específica $u(\mathbf{x},t)$ de la ecuación (5.85). Esta expresión se obtiene utilizando la forma local espacial de la ecuación de balance de energía (5.90):

$$\rho \frac{du}{dt} \overset{not}{=} \rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \rho r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} \Rightarrow \quad \rho r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} = \rho \dot{u} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \tag{5.114}$$

y sustituyéndola en la ecuación de Clausius-Plank (5.112):

$$\rho \theta \dot{s}^i_{local} = \rho \theta \dot{s} - [\rho r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q}] = \rho \theta \dot{s} - \rho \dot{u} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \geq 0 \tag{5.115}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ecuación de Clausius - Plank}\\ \text{en función de la}\\ \text{energía interna}\end{array}\right\} \rightarrow -\rho(\dot{u} - \theta \dot{s}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \geq 0 \tag{5.116}$$

- *Ecuación de Clausius-Plank en función de la energía libre de Helmholtz.*

Otra posibilidad es expresar la ecuación de Clausius-Plank en función de la energía libre (específica) de Helmholtz $\psi(\mathbf{x},t)$ que se define en función de la energía interna, de la entropía y de la temperatura como:

$$\boxed{\psi \overset{def}{=} u - s\theta} \tag{5.117}$$

Derivando respecto al tiempo la ecuación (5.117), se obtiene

$$\dot{\psi} = \dot{u} - s\dot{\theta} - \dot{s}\theta \Rightarrow \dot{u} - \theta \dot{s} = \left[\dot{\psi} + s\dot{\theta}\right] \tag{5.118}$$

y substituyendo la ecuación (5.118) en la (5.116), se obtiene la ecuación de Clausius-Plank en función de la energía libre de Helmholtz:

$$\rho \theta \dot{s}^i_{local} = -\rho(\dot{u} - \theta \dot{s}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = -\rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \geq 0 \tag{5.119}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ecuación de Clausius - Plank}\\ \text{en función de la}\\ \text{energía libre}\end{array}\right\} \rightarrow -\rho(\dot{\psi} + s\,\dot{\theta}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \geq 0 \geq 0 \tag{5.120}$$

Para el caso de deformación infinitesimal se tiene que $\mathbf{d} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (ver capítulo 2, Observación 2-22) y substituyendo en la ecuación (5.120) se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ecuación de}\\ \text{Clausius - Plank}\\ \text{(Deformación infinitesimal)}\end{array}\right\} \rightarrow -\rho(\dot{\psi} + s\,\dot{\theta}) + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0 \tag{5.121}$$

5.13 Ecuaciones de la mecánica de medios continuos. Ecuaciones constitutivas

Llegados a este punto resulta conveniente resumir el conjunto de ecuaciones diferenciales (locales) proporcionado por las ecuaciones de conservación-balance:

1) *Conservación de la masa*. Ecuación de continuidad.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{v}=0\\ &\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial x_i}=0 \end{aligned}\right\}\rightarrow 1\text{ ecuación} \tag{5.122}$$

2) *Balance de la cantidad de movimiento*. Ecuación de Cauchy.

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{b}=\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\\ &\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}+\rho b_i=\rho\frac{d\mathrm{v_i}}{dt}\quad i\in\{1,2,3\} \end{aligned}\right\}\rightarrow 3\text{ ecuaciones} \tag{5.123}$$

3) *Balance del momento angular*. Simetría del tensor de tensiones:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^T\\ &\sigma_{12}=\sigma_{21}\ ;\ \sigma_{13}=\sigma_{31}\ ;\ \sigma_{23}=\sigma_{32} \end{aligned}\right\}\rightarrow 3\text{ ecuaciones} \tag{5.124}$$

4) *Balance de la energía*. Primer principio de la termodinámica.

$$\left.\begin{aligned} &\rho\frac{du}{dt}=\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}+(\rho r-\nabla\cdot\mathbf{q})\\ &\rho\frac{du}{dt}=\sigma_{ij}d_{ij}+\left(\rho r-\frac{\partial \mathrm{q_i}}{\partial x_i}\right) \end{aligned}\right\}\rightarrow 1\text{ ecuación} \tag{5.125}$$

5) *Segundo principio de la Termodinámica*. Desigualdad de Clausius-Plank y del flujo de calor*:*

$$\left.\begin{aligned} &-\rho(\dot{u}-\theta\dot{s})+\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}\geq 0\\ &-\rho(\dot{u}-\theta\dot{s})+\sigma_{ij}d_{ij}\geq 0 \end{aligned}\right\}\rightarrow 1\text{ restricción}$$

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{1}{\rho\theta^2}\mathbf{q}\cdot\nabla\theta\geq 0\\ &-\frac{1}{\rho\theta^2}q_i\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\geq 0 \end{aligned}\right\}\rightarrow 1\text{ restricción} \tag{5.126}$$

que suman un total de *8 ecuaciones diferenciales en derivadas parciales* (EDP's) y dos restricciones.

Haciendo un recuento del número de incógnitas que intervienen en dichas ecuaciones se tiene.

$$\left.\begin{array}{l}\rho \rightarrow 1 \text{ incógnita}\\ \mathbf{v} \rightarrow 3 \text{ incógnitas}\\ \boldsymbol{\sigma} \rightarrow 9 \text{ incógnitas}\\ u \rightarrow 1 \text{ incógnita}\\ \mathbf{q} \rightarrow 3 \text{ incógnitas}\\ \theta \rightarrow 1 \text{ incógnita}\\ s \rightarrow 1 \text{ incógnita}\end{array}\right\} 19 \text{ incógnitas}$$

NOTA

No se contabilizan como incógnitas las seis componentes distintas del tensor velocidad de deformación $\mathbf{d}$, en las ecuaciones (5.125) y (5.126), puesto que se suponen implícitamente calculables en función de la velocidad $\mathbf{v}$ mediante la relación:

$\mathbf{d}(\mathbf{v}) = \nabla^s \mathbf{v}$

(ver capítulo 2, apartado 2.13.2)

Es evidente, por consiguiente, que se necesitarán ecuaciones adicionales para resolver el problema. Estas ecuaciones, que reciben el nombre genérico de *ecuaciones constitutivas* y que son propias del material que constituye el medio continuo, son:

6) *Ley de Fourier de conducción del calor:*

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{q} = -K\,\nabla\theta\\ q_i = -K\,\dfrac{\partial\theta}{\partial x_i} \quad i \in \{1,2,3\}\end{array}\right\} \rightarrow 3 \text{ ecuaciones} \qquad (5.127)$$

NOTA

Es frecuente que en las ecuaciones constitutivas termo mecánicas intervengan las deformaciones, $\boldsymbol{\varepsilon}$, que, sin embargo, no se contabilizan como incógnitas adicionales puesto que se suponen calculables en función de las ecuaciones del movimiento que, a su vez, pueden calcularse por integración del campo de velocidades

$\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$

(ver Capítulos 1 y 2).

7) *Ecuaciones constitutivas (propiamente dichas):*

$$\begin{array}{ll}\text{Ec. constitutivas termo - mecánicas:} & \rightarrow f_i(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \theta, \boldsymbol{\mu}) = 0 \quad i \in \{1,..,6\} \rightarrow 6 \text{ ecuaciones}\\ \text{Ec. constitutiva de la entropía:} & \rightarrow s = s(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \theta, \boldsymbol{\mu}) \qquad \rightarrow 1 \text{ ecuación}\end{array} \qquad (5.128)$$

donde $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, ..., \mu_p\}$ son un conjunto de nuevas variables termodinámicas (p nuevas incógnitas) introducidas por las ecuaciones constitutivas termo-mecánicas.

8) *Ecuaciones termodinámicas de estado:*

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Ecuación calórica de estado} & \rightarrow u = g(\rho, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \theta, \boldsymbol{\mu})\\ \text{Ecuaciones cinéticas de estado} & \rightarrow F_i(\rho, \theta, \boldsymbol{\mu}) = 0 \quad i \in \{1,2...p\}\end{array}\right\} \rightarrow (1+p) \text{ ecuaciones} \qquad (5.129)$$

Nos encontramos ahora con un conjunto de $(19+p)$ ecuaciones y $(19+p)$ incógnitas que, con las adecuadas condiciones de contorno, definen un problema matemáticamente bien puesto.

Observación 5-17

Las ecuaciones de continuidad, de Cauchy, de simetría del tensor de tensiones, de balance de energía y las desigualdades del segundo principio de la termodinámica (ecuaciones (5.122) a (5.126)) son válidas y generales para todo medio continuo, sea cual sea el material que lo constituye y para cualquier rango de desplazamientos o de deformaciones. Por el contrario, las ecuaciones constitutivas (5.127) a (5.129) son específicas del material o del tipo del medio continuo con el que se trate (sólido, fluido, gas) y los diferencian entre sí.

5.13.1 Problema termo-mecánico desacoplado

Para la resolución del problema general en Mecánica de Medios Continuos se ha de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que involucra las $(19+p)$ ecuaciones y las $(19+p)$ incógnitas discutidas en el apartado anterior. Sin embargo, en determinadas circunstancias o bajo ciertas hipótesis, es posible descomponer el problema general en dos problemas menores (involucrando cada uno de ellos un número menor de ecuaciones e incógnitas), denominados *problema mecánico* y *problema térmico*, que se pueden resolver de forma independiente (desacoplada) entre sí.

Como ejemplo, considérese que la distribución de temperaturas $\theta(\mathbf{x},t)$ es conocida *a priori,* o no interviene de forma relevante en las ecuaciones constitutivas termo-mecánicas (5.128), y que, además, dichas ecuaciones constitutivas no involucran nuevas variables termodinámicas ($\boldsymbol{\mu}=\{\varnothing\}$). En este caso consideremos el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Ec. de continuidad :} & \dfrac{d\rho}{dt}+\rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}=0 & (1\,\text{ec.}) \\ \text{Ec. de Cauchy :} & \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\,\mathbf{b}=\rho\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} & (3\,\text{ec.}) \\ \text{Ecs. constitutivas mecánicas :} & f_i\left(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\right)=0 \quad i\in\{1,\ldots 6\} & (6\,\text{ec.}) \end{array}\right\} \rightarrow 10\,\text{ecuaciones} \qquad (5.130)$$

que involucran a las siguientes incógnitas: :

$$\left.\begin{array}{l} \rho(\mathbf{x},t)\rightarrow 1\,\text{incógnita} \\ \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\rightarrow 3\,\text{incógnitas} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)\rightarrow 6\,\text{incógnitas} \end{array}\right\} \; 10\,\text{incógnitas} \qquad (5.131)$$

El problema definido por las ecuaciones (5.130) y (5.131) constituye el denominado *problema mecánico* que involucra las variables (5.131) (*denominadas variables mecánicas*) que, por otra parte, son las de verdadero interés en muchos problemas de ingeniería.

El problema mecánico constituye, en este caso, un sistema de ecuaciones diferenciales *reducido* respecto al problema general y puede resolverse *independientemente* del resto de las ecuaciones del mismo.

NOTA

Por simplicidad, se ha supuesto aquí la simetría del tensor de tensiones (5.124) ya impuesta, eliminando tal condición del conjunto de ecuaciones y reduciendo el número de incógnitas de $\boldsymbol{\sigma}$ de 9 a 6 componentes.

6 Elasticidad lineal

6.1 Hipótesis de la Teoría de la Elasticidad Lineal

La Teoría de la Elasticidad Lineal puede considerarse una simplificación de teorías más generales (Teoría general de la Elasticidad), pero suficientemente aproximada para la mayoría de las aplicaciones en Ingeniería.

Las hipótesis simplificativas de la Teoría de la Elasticidad Lineal son esencialmente las siguientes:

a) *Deformaciones infinitesimales* (los desplazamientos y sus gradientes son pequeños, ver capítulo 2):

- *Desplazamientos pequeños*: No se diferencian la configuración material (correspondiente al instante de referencia t_0) de la espacial (correspondiente al instante actual t) y, en consecuencia, tampoco se diferencian las coordenadas espaciales de las materiales, ver Figura 6-1.

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \underbrace{\mathbf{u}}_{\approx \mathbf{0}} \Rightarrow \quad \mathbf{x} \approx \mathbf{X} \tag{6.1}$$

Observación 6-1

Como consecuencia de la ecuación (6.1), *no hay diferencia entre las descripciones espacial y material* de una propiedad:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} \Rightarrow \gamma(\mathbf{x},t) = \gamma(\mathbf{X},t) = \Gamma(\mathbf{X},t) = \Gamma(\mathbf{x},t)$$

y toda referencia a descripciones espaciales y materiales (así como a los conceptos asociados, como derivada local, derivada material etc.) pierden su sentido en elasticidad infinitesimal.

Tampoco se distingue entre los operadores diferenciales *Nabla espacial* ($\boldsymbol{\nabla}$) y *Nabla material* ($\overline{\boldsymbol{\nabla}}$):

$$\frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{x}} \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}(\bullet) = \overline{\boldsymbol{\nabla}}(\bullet)$$

A partir de la ecuación (6.1), puede escribirse:

$$\mathbf{F}=\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}\approx \mathbf{1} \;\Rightarrow\; |\mathbf{F}|\approx 1 \tag{6.2}$$

Observación 6-2

Como consecuencia de la ecuación (6.2) y de la ecuación de conservación de la masa, la densidad en la configuración actual $\rho_t \equiv \rho(\mathbf{X},t)$ coincide con la de la configuración de referencia $\rho_0 \equiv \rho(\mathbf{X},0)$ (que se supone conocida):

$$\rho_0 = \rho_t |\mathbf{F}| \approx \rho_t$$

y en *consecuencia la densidad no es incógnita en problemas de elasticidad lineal.*

- *Gradientes de los desplazamientos pequeños*:

  Como consecuencia no hay distinción entre los tensores material $\mathbf{E}(\mathbf{X},t)$ y espacial $\mathbf{e}(\mathbf{x},t)$ de deformación que colapsan en el tensor de deformación infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$:

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{X},t)\approx \mathbf{e}(\mathbf{x},t)=\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}=\nabla^S\mathbf{u}=\dfrac{1}{2}\left(\mathbf{u}\otimes\nabla+\nabla\otimes\mathbf{u}\right) \\ \varepsilon_{ij}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]\;\; i,j\in\{1,2,3\} \end{cases} \tag{6.3}$$

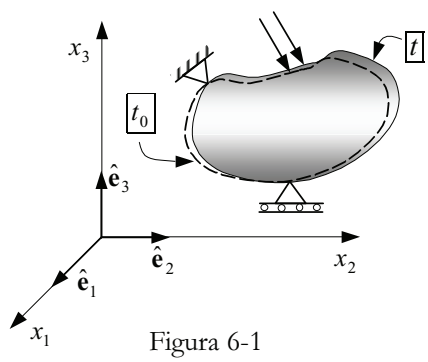


Figura 6-1

b) *Existencia de un estado neutro*:

Se admite la existencia de un estado neutro en el que las deformaciones y las tensiones son nulas. Normalmente, se entiende que el estado neutro se produce en la configuración de referencia:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t_0)=\mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t_0)=\mathbf{0} \end{cases} \tag{6.4}$$

NOTA

La restricción a procesos *isotérmicos* desaparece en la teoría de la *termoelasticidad* lineal abordada en el apartado 6.

c) *Se considera (en principio) que el proceso de deformación es isotérmico y adiabático*

Definiciones:

Procesos isotérmicos: aquellos que tienen lugar a temperatura $\theta(\mathbf{x},t)$ constante a lo largo del tiempo:

$$\Rightarrow \theta(\mathbf{x},t) \equiv \theta(\mathbf{x})$$

Procesos adiabáticos : aquellos que se producen sin generación de calor en todo punto e instante de tiempo:

$$\text{Calor generado en un dominio V}: \int_V \rho\, r\, dV - \int_{\partial V} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\, dS = 0 \quad \forall V$$

$$\Rightarrow\ \rho\, r - \nabla\cdot\mathbf{q} = 0 \quad \forall \mathbf{x}\ \ \forall t$$

Los procesos de deformación *lentos* suelen considerarse adiabáticos.

6.2 Ecuación constitutiva elástica lineal. Ley de Hooke generalizada

La ley de Hooke para problemas unidimensionales supone la *proporcionalidad* entre la tensión, σ, y la deformación, ε, a través de la constante de proporcionalidad denominada módulo de elasticidad E:

$$\sigma = E\ \varepsilon \tag{6.5}$$

En la Teoría de la Elasticidad esta proporcionalidad se generaliza al caso multidimensional suponiendo la *linealidad* de la relación entre las componentes del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ y de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ en lo que se denomina *Ley de Hooke generalizada:*

$$\text{Ley de Hooke generalizada} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t) \\ \sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl}\ \varepsilon_{kl} \qquad i,j \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{6.6}$$

que constituye la ecuación constitutiva para un material elástico lineal.

El tensor de cuarto orden $\mathbb{C}$ (denominado *tensor de constantes elásticas*) tiene en principio 3^4 =81 componentes. Sin embargo, debido a la simetría de $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$, debe presentar ciertas simetrías ante el intercambio de índices. Estas son:

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{C}_{ijkl} &= \mathbb{C}_{jikl} \\ \mathbb{C}_{ijkl} &= \mathbb{C}_{ijlk} \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{Simetrías mayores}$$
$$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij} \quad \rightarrow \text{Simetrías menores} \tag{6.7}$$

y, como consecuencia, el número de constantes distintas en el tensor de constantes elásticas $\mathbb{C}$ se reduce a entonces a 21.

Observación 6-3

Una característica esencial del comportamiento elástico (que se comprueba en la ecuación (6.5)) es la dependencia de las tensiones, en un cierto punto e instante $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$, (únicamente) de las deformaciones en dicho punto e instante $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ y no de la historia de deformaciones previa.

6.2.1 Potencial elástico

NOTA

Se considera aquí la identidad, propia del caso de deformación infinitesimal: $\mathbf{d} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$

Consideremos *la energía interna específica* $u(\mathbf{x},t)$ (energía interna/unidad de masa) y la *densidad de energía interna* $\hat{u}(\mathbf{x},t)$ (energía interna/unidad de volumen) relacionadas por:

$$\begin{aligned} &\hat{u}(\mathbf{x},t) = \rho_0\, u(\mathbf{x},t) \\ &\rho \frac{du}{dt} \approx \rho_0 \frac{du}{dt} = \frac{d\overbrace{(\rho_0 u)}^{\hat{u}}}{dt} = \frac{d\hat{u}}{dt} \end{aligned} \tag{6.8}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\rho_0 \approx \rho$ (ver Observación 6-2). Consideremos ahora la ecuación de la energía (forma local):

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{du}{dt} = \frac{d\,\hat{u}}{dt} &= \boldsymbol{\sigma} : \underbrace{\mathbf{d}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \underbrace{\rho_0\, r - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q}}_{=0} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \Rightarrow \quad \frac{d\hat{u}}{dt} &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \tag{6.9}$$

donde se ha considerado la naturaleza adiabática del proceso de deformación ($\rho\, r - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} = 0$).

La forma global (integral) de la ecuación de la energía (6.9) se obtiene integrando sobre el volumen material V:

Forma global de la ecuación de la Energía en Elasticidad lineal $\rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{U}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\underbrace{\int_{V_t \equiv V} \hat{u}\, dV}_{\mathcal{U}} = \int_V \dfrac{d\hat{u}}{dt} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\, dV \\ \mathcal{U}(t) = \int_V \hat{u}\,(\mathbf{x},t)\, dV \end{cases} \tag{6.10}$$

donde $\mathcal{U}(t)$ es la energía interna del volumen material considerado.

Observación 6-4

La potencia tensional (para el caso de elasticidad lineal) es una diferencial exacta:

$$\text{Potencial tensional} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\, \mathrm{dV} = \frac{d\mathcal{U}}{dt}$$

Substituyendo ahora le ecuación (6.6) en la (6.9):

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{u}}{dt} \overset{not}{=} \dot{\hat{u}} &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\varepsilon}_{ij}\sigma_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}\mathbb{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}\mathbb{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \dot{\varepsilon}_{ij}\mathbb{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}\mathbb{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \dot{\varepsilon}_{kl}\mathbb{C}_{klij}\varepsilon_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}\mathbb{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ij}\mathbb{C}_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}\mathbb{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ij}\mathbb{C}_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\varepsilon_{kl}\mathbb{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}\right)\end{aligned} \tag{6.11}$$

donde se han considerado las simetrías de la ecuación (6.7). Integrando la ecuación (6.11) e imponiendo la condición de que la densidad de energía interna $\hat{u}(\mathbf{x}, t_0)$ en el estado neutro (para $t = t_0 \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{0}$) sea nula:

NOTA

La condición $\hat{u}(\mathbf{x}, t_0) = 0$ puede introducirse sin pérdida de generalidad.

$$\left.\begin{aligned}&\hat{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)\right) + a(\mathbf{x}) \\ &\hat{u}(\mathbf{x}, t_0) = 0 \qquad \forall \mathbf{x}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t_0)}_{=\mathbf{0}} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t_0) + a(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \tag{6.12}$$

$$\boxed{\text{Densidad de energía interna} \rightarrow \ \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\mathbb{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl}} \tag{6.13}$$

Derivando la ecuación (6.13) respecto a $\boldsymbol{\varepsilon}$ y teniendo de nuevo en cuenta las simetrías:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \dfrac{1}{2}\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \dfrac{1}{2}\underbrace{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}}_{\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} = \dfrac{1}{2}\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \dfrac{1}{2}\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \\ \dfrac{\partial \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_{ij}} = \dfrac{1}{2}\mathbb{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \dfrac{1}{2}\varepsilon_{kl}\mathbb{C}_{klij} = \dfrac{1}{2}\mathbb{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \dfrac{1}{2}\mathbb{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \mathbb{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \sigma_{ij}\end{cases} \tag{6.14}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \\ \dfrac{\partial \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \qquad i, j \in \{1,2,3\}\end{cases} \tag{6.15}$$

La ecuación (6.15) califica a la densidad de energía interna $\hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})$ como un potencial para las tensiones (que se obtienen por derivación del mismo) denominado *potencial elástico*:

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{Potencial elástico} \rightarrow \quad \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \underbrace{\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma}\end{aligned}} \tag{6.16}$$

6.3 Isotropía – Constantes de Lamé – Ley de Hooke para elasticidad lineal isótropa

Definición:

Material isótropo: Aquel que tiene las mismas propiedades en todas las direcciones.

Para el caso de un material elástico lineal, las *propiedades elásticas* están contenidas en el tensor $\mathbb{C}$ de propiedades elásticas de las ecuaciones (6.6) o (6.7). En consecuencia, las componentes de dicho tensor deben ser independientes de la orientación del sistema cartesiano en el que se trabaje. Si consideramos, por ejemplo, los sistemas $\{x_1, x_2, x_3\}$ y $\{x_1', x_2', x_3'\}$ de la Figura 6-2, la ecuación constitutiva para los dos sistemas se escribe:

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2, x_3\} &\Rightarrow [\boldsymbol{\sigma}] = [\mathbb{C}] : [\boldsymbol{\varepsilon}] \\ \{x_1', x_2', x_3'\} &\Rightarrow [\boldsymbol{\sigma}]' = [\mathbb{C}]' : [\boldsymbol{\varepsilon}]' \end{aligned} \tag{6.17}$$

y, para el caso de material isótopo, las componentes de $\mathbb{C}$ en ambos sistemas deben ser las mismas ($\Rightarrow [\mathbb{C}] = [\mathbb{C}]'$). En consecuencia, la anterior definición, de carácter físico, de isotropía se traduce en el *carácter isotrópo*, en el sentido matemático, del tensor de constantes elásticas $\mathbb{C}$:

$$\text{Tensor de constantes elásticas} \rightarrow \begin{cases} \mathbb{C} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I} \\ \mathbb{C}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \left[\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right] \quad i, j, k.l \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{6.18}$$

Donde λ, μ son conocidas como las *constantes de Lamé,* que caracterizan el comportamiento elástico del material y que deben ser obtenidas experimentalmente.

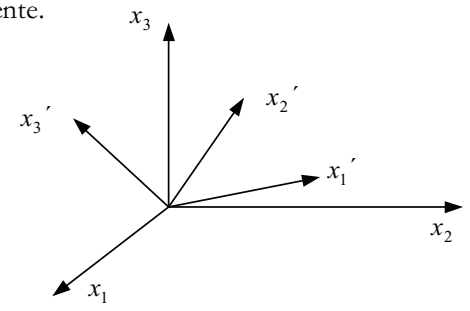


Figura 6-2

Observación 6-5

La condición de isotropía reduce el número de constantes elásticas del material de 21 a 2.

NOTA

Un tensor es isotrópo si mantiene sus componentes en cualquier sistema de coordenadas cartesiano. La expresión más general de un *tensor isotrópo de cuarto orden* es :

$\mathbb{C} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}$

$\forall \lambda \; y \; \mu$

RECORDATORIO

El tensor simétrico unitario de cuarto orden $\mathbf{I}$ (isotrópo) se define mediante sus componentes:

$[\mathbf{I}]_{ijkl} = \frac{1}{2}\left[\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right]$

Substituyendo la ecuación (6.18) en la (6.6) se obtiene la *ecuación constitutiva elástica lineal isótropa*:

$$\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \lambda\delta_{ij}\underbrace{\delta_{kl}\varepsilon_{kl}}_{\varepsilon_{ll}} + 2\mu\underbrace{(\frac{1}{2}\underbrace{\delta_{ik}\delta_{jl}\varepsilon_{kl}}_{\varepsilon_{ij}} + \frac{1}{2}\underbrace{\delta_{il}\delta_{jk}\varepsilon_{kl}}_{\varepsilon_{ji}=\varepsilon_{ij}})}_{\varepsilon_{ij}} \tag{6.19}$$

$$\text{Ecuación constitutiva para material elástico lineal isótropo. Ley de Hooke.} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \lambda\, Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu\,\boldsymbol{\varepsilon} \\ \sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{ll} + 2\mu\,\varepsilon_{ij} \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{6.20}$$

6.3.1 Inversión de la ley de Hooke. Módulo de Young. Coeficiente de Poisson

La ecuación constitutiva (6.20) proporciona las tensiones en función de las deformaciones. Para obtener su inversa se procede como sigue:
a) se obtiene la traza de la ecuación (6.20):

$$\left.\begin{aligned} &Tr(\boldsymbol{\sigma}) = \lambda\, Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\underbrace{Tr(\mathbf{1})}_{3} + 2\mu\, Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) = (3\lambda + 2\mu)Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ &(i=j) \Rightarrow \sigma_{ii} = \lambda\varepsilon_{ll}\underbrace{\delta_{ii}}_{3} + 2\mu\varepsilon_{ii} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{ll} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{(3\lambda + 2\mu)} Tr(\boldsymbol{\sigma}) \tag{6.21}$$

b) despejando $\boldsymbol{\varepsilon}$ de la ecuación (6.20) y substituyendo la (6.21):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{1}{2\mu}\lambda\, Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{\sigma} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} + \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{\sigma} \tag{6.22}$$

Definiendo ahora unas nuevas propiedades elásticas E (*módulo de Young)* y ν (*coeficiente de Poisson*):

$$\left.\begin{aligned} &\text{Módulo de Young :} \\ &\text{(Módulo de deformación longitudinal)} \end{aligned}\right\} \rightarrow E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$
$$\left.\begin{aligned} &\text{Coeficiente de Poisson :} \end{aligned}\right\} \rightarrow \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = G \rightarrow \text{(Módulo de deformación transversal)} \end{cases} \tag{6.23}$$

La ecuación (6.22) puede reescribirse en función de E y de ν dando lugar a *la Ley de Hooke inversa*:

$$\text{Ecuación constitutiva inversa para material elástico lineal isótropo} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = -\dfrac{\nu}{E} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} + \dfrac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} \\ \varepsilon_{ij} = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_{ll}\,\delta_{ij} + \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{6.24}$$

Finalmente, las ecuaciones (6.24) pueden reescribirse utilizando la notación ingenieril para las componentes de los tensores de tensión de deformación como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \end{aligned} \tag{6.25}$$

Ejemplo 6-1 – *Para la pieza de la figura, constituida por una material elástico lineal isótropo, con módulo de Young E y módulo de deformación transversal G, se admite el siguiente estado tensional uniforme:*

$$\sigma_x \neq 0 \quad ; \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Obtener las deformaciones ingenieriles.

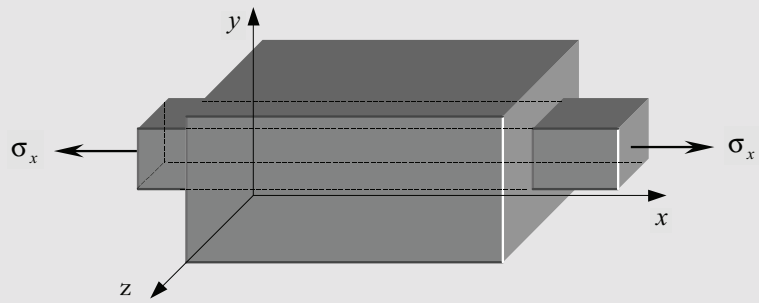


Figura 6-3

Resolución:

De las ecuaciones de (6.25) se puede obtener:

$$\sigma_y = \sigma_z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\sigma_x \\ \varepsilon_y = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_z = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E} \end{cases} \qquad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy} = 0 \\ \gamma_{xz} = \dfrac{1}{G}\tau_{xz} = 0 \\ \gamma_{yz} = \dfrac{1}{G}\tau_{yz} = 0 \end{cases}$$

Como consecuencia de dichas deformaciones la pieza se estira en la dirección x y se contrae en las direcciones y, z (ver Figura 6-3).

6.4 Ley de Hooke en componentes esféricas y desviadoras

Consideremos la descomposición de los tensores de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ y de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ en su parte esférica y desviadora:

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\frac{1}{3}Tr(\boldsymbol{\sigma})\,\mathbf{1}}_{\sigma_m} + \boldsymbol{\sigma}' = \sigma_m \mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}' \tag{6.26}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3}\underbrace{Tr(\boldsymbol{\varepsilon})}_{e}\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}' = \frac{1}{3}e\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}' \tag{6.27}$$

La deformación volumétrica $e = Tr(\boldsymbol{\varepsilon})$ se obtiene a partir de la traza de la ecuación (6.24):

$$e = Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) = -\frac{\nu}{E}Tr(\boldsymbol{\sigma})\underbrace{Tr(\mathbf{1})}_{3} + \frac{1+\nu}{E}Tr(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1-2\nu}{E}\underbrace{Tr(\boldsymbol{\sigma})}_{3\sigma_m} = \frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_m \tag{6.28}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_m = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}e = K\,e \\ K \overset{def}{=} \lambda + \dfrac{2}{3}\mu = \dfrac{E}{3(1-2\nu)} = \text{Módulo de deformación volumétrica} \end{cases} \tag{6.29}$$

Substituyendo las ecuaciones (6.26), (6.27) y (6.29)en la (6.24):

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= -\frac{\nu}{E}3\sigma_m\mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E}[\sigma_m\mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}'] = \\ &= \frac{1-2\nu}{E}\underbrace{\frac{\sigma_m}{3(1-2\nu)}e}_{\frac{E}{}}\mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{3}e\mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma}' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tag{6.30}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3}e\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}' = \frac{1}{3}e\mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma}' \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon}' = \underbrace{\frac{1+\nu}{E}}_{\frac{1}{2\mu}}\boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{2G}\boldsymbol{\sigma}'$$

Las ecuaciones (6.29) y (6.30) relacionan la parte esférica (caracterizada por la tensión media σ_m y la deformación volumétrica e) y la parte desviadora ($\boldsymbol{\sigma}'$ y $\boldsymbol{\varepsilon}'$) de los tensores de tensión y de deformación:

$$\begin{aligned} &\sigma_m = Ke && \rightarrow \text{Parte esférica} \\ &\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\sigma}' = 2G\boldsymbol{\varepsilon}' \\ &\sigma'_{ij} = 2G\varepsilon'_{ij} \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{aligned}\right\} && \rightarrow \text{Parte desviadora} \end{aligned} \tag{6.31}$$

Observación 6-6
Nótese la proporcionalidad tanto entre σ_m y e como entre la componentes (una a una) σ'_{ij} y ε'_{ij} (ver Figura 6-4).

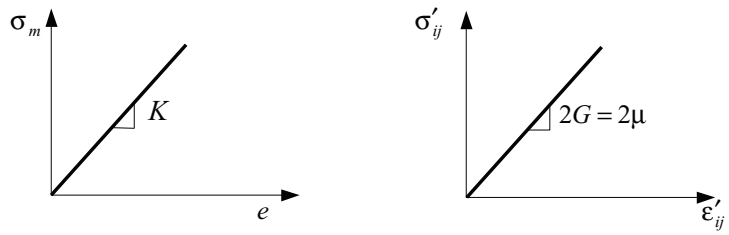


Figura 6-4 Ley de Hooke en componentes esféricas y desviadoras

6.5 Limitaciones en los valores de las propiedades elásticas

Por consideraciones termodinámicas puede demostrarse que el tensor de propiedades elásticas $\mathbb{C}$ es definido positivo, y por tanto

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} > 0; \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0} \tag{6.32}$$

RECORDATORIO

Se dice que un tensor simétrico de cuarto orden $\mathbf{A}$ es *definido positivo* si para todo tensor de segundo orden $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ se cumple $\mathbf{x} : \mathbf{A} : \mathbf{x} = x_{ij} A_{ijkl} x_{kl} > 0$ y además $\mathbf{x} : \mathbf{A} : \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$

Observación 6-7

Como consecuencia de la ecuación (6.32), el potencial elástico es siempre nulo o positivo

$$\hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \geq 0$$

Observación 6-8

El potencial elástico *presenta un mínimo en el estado neutro* (para $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$) (ver Figura 6-5). En efecto, de la ecuación (6.15):

$$\hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \frac{\partial^2 \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left. \dfrac{\partial \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}} = \mathbf{0} & \Rightarrow \quad \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon}) \text{ tiene un extremo (máximo - minimo) en } \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \\ \left. \dfrac{\partial^2 \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}} = \underbrace{\mathbb{C}}_{\substack{\text{definido} \\ \text{positivo}}} & \Rightarrow \quad \text{El extremo es un mínimo} \end{cases}$$

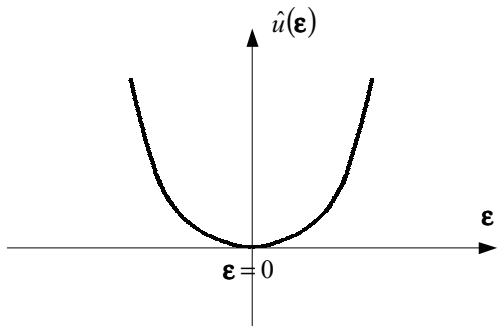


Figura 6-5 Potencial elástico

Consideremos la expresión del potencial elástico (6.16) y la ecuación constitutiva (6.20):

$$\hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\mathbb{C}:\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}\left[\lambda Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\,\mathbf{1}+2\mu\boldsymbol{\varepsilon}\right]:\boldsymbol{\varepsilon}= \\ =\frac{1}{2}\lambda Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\underbrace{\mathbf{1}:\boldsymbol{\varepsilon}}_{Tr(\boldsymbol{\varepsilon})}+\mu\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}\lambda Tr^2(\boldsymbol{\varepsilon})+\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6.33}$$

La expresión (6.33) puede ponerse también en función de las componentes esféricas y desviadoras de la deformación:

$$\boxed{\hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})=\frac{1}{2}\lambda(\underbrace{Tr(\boldsymbol{\varepsilon})}_{e})^2+\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}\lambda\,e^2+\mu\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{6.34}$$

NOTA

La traza de un tensor desviador es siempre nula $\Rightarrow Tr(\boldsymbol{\varepsilon}')=0$

$$\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\varepsilon}=\left(\frac{1}{3}e\mathbf{1}+\boldsymbol{\varepsilon}'\right):\left(\frac{1}{3}e\mathbf{1}+\boldsymbol{\varepsilon}'\right)=\frac{1}{9}e^2\underbrace{\mathbf{1}:\mathbf{1}}_{3}+\frac{2}{3}e\underbrace{\mathbf{1}:\boldsymbol{\varepsilon}'}_{Tr(\boldsymbol{\varepsilon}')=0}+\boldsymbol{\varepsilon}':\boldsymbol{\varepsilon}'= \\ =\frac{1}{3}e^2+\boldsymbol{\varepsilon}':\boldsymbol{\varepsilon}' \tag{6.35}$$

y substituyendo la ecuación (6.35) en la (6.34):

$$\Rightarrow\hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})=\frac{1}{2}\lambda\,e^2+\frac{1}{3}\mu\,e^2+\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}':\boldsymbol{\varepsilon}'=\frac{1}{2}\underbrace{\left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)}_{K}e^2+\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}':\boldsymbol{\varepsilon}' \tag{6.36}$$

$$\boxed{\hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})=\frac{1}{2}K\,e^2+\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}':\boldsymbol{\varepsilon}'\geq 0} \tag{6.37}$$

Considérese ahora un cierto material elástico lineal isótropo, caracterizado por un cierto valor de sus propiedades elásticas. La ecuación (6.37) debe cumplirse para cualquier proceso de deformación. Consideremos dos tipos particulares:

1) *Un proceso de deformación puramente esférico:*

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}&=\frac{1}{3}e\,\mathbf{1}\\ \boldsymbol{\varepsilon}'^{(1)}&=\mathbf{0}\end{aligned}\right\}\rightarrow\hat{u}^{(1)}=\frac{1}{2}K\,e^2\geq 0\Rightarrow K>0 \tag{6.38}$$

2) *Un proceso de deformación puramente desviador:*

NOTA

El producto doblemente contraído de un tensor por él mismo es siempre mayor o igual a cero

$\Rightarrow\boldsymbol{\varepsilon}':\boldsymbol{\varepsilon}'=\underbrace{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}_{\geq 0}\geq 0$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}&=\boldsymbol{\varepsilon}'\\ e^{(2)}&=0\end{aligned}\right\}\rightarrow\hat{u}^{(2)}=\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}':\boldsymbol{\varepsilon}'\geq 0\Rightarrow\mu\;>0 \tag{6.39}$$

Las ecuaciones (6.38) y (6.39) conducen a las siguientes limitaciones en los valores de las constantes elásticas:

$$K=\frac{E}{3(1-2\nu)}>0\quad;\quad\mu=G=\frac{E}{2(1+\nu)}>0 \tag{6.40}$$

La experiencia demuestra que el coeficiente de Poisson ν es siempre no negativo y en consecuencia:

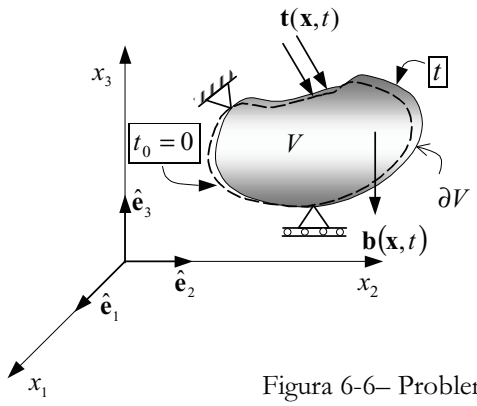
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{E}{2(1+\nu)}>0\\ \nu\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\ E>0$$
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{E}{3(1-2\nu)}>0\\ E\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\ 0\leq\nu\leq\dfrac{1}{2}\qquad(6.41)$$

6.6 Planteamiento del problema elástico lineal

NOTA

Se denomina aquí *sólido elástico lineal* a un medio continuo constituido por un material que obedece a la ecuación constitutiva elástica lineal.

Consideremos el sólido elástico lineal de la Figura 6-6 sometido a unas acciones caracterizadas por el vector de fuerzas másicas $\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$ en el interior del volumen V y el vector de tracción $\mathbf{t}(\mathbf{x},t)$ en el contorno ∂V. Denominamos *problema elástico lineal* al conjunto de ecuaciones que permiten obtener la evolución a lo largo del tiempo de los correspondientes desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ y tensiones $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$.



Acciones iniciales:

$$t=0\rightarrow\begin{cases}\mathbf{b}(\mathbf{x},0)\\ \mathbf{t}(\mathbf{x},0)\end{cases}$$

Acciones en el tiempo t:

$$\begin{cases}\mathbf{b}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{t}(\mathbf{x},t)\end{cases}$$

Figura 6-6– Problema elástico lineal

6.6.1 Ecuaciones de gobierno

El problema elástico lineal viene gobernado por las siguientes *ecuaciones:*

1) *Ecuación de Cauchy* (balance de la cantidad de movimiento)

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)+\rho_0\mathbf{b}(\mathbf{x},t)=\rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}+\rho_0 b_j=\rho_0\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}\quad j\in\{1,2,3\}\qquad\text{(3 ecuaciones)}\qquad(6.42)$$

NOTA

La simetría de los tensores de tensión y de deformación conlleva que de las nueve ecuaciones sólo seis sean distintas entre sí. Asimismo, al contabilizar incógnitas sólo se consideran las componentes *distintas* de dichos tensores.

2) *Ecuación constitutiva* (elástica lineal isótropa):

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)=\lambda Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1}+2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{ll}+2\mu\varepsilon_{ij}\qquad i,j\in\{1,2,3\}\qquad\text{(6 ecuaciones)}\qquad(6.43)$$

3) *Ecuación geométrica*: (relación de compatibilidad entre deformaciones infinitesimales y desplazamientos):

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)=\boldsymbol{\nabla}^S\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\otimes\boldsymbol{\nabla}+\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}\right)$$
$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\quad i,j\in\{1,2,3\}\qquad\text{(6 ecuaciones)}\tag{6.44}$$

Dichas ecuaciones involucran a las siguientes incógnitas:

- $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ (3 incógnitas)
- $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ (6 incógnitas) (6.45)
- $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$ (6 incógnitas)

Las ecuaciones (6.42) a (6.44) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP's). El sistema está constituido por 15 ecuaciones diferenciales con las 15 incógnitas (6.45) (del tipo $(\bullet)(x,y,z,t)$) que por tanto debe ser resulto en el espacio $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+$. El problema queda bien determinado cuando se le provee de las adecuadas condiciones de contorno.

6.6.2 Condiciones de contorno

6.6.2.1 Condiciones de contorno en el espacio

Consideraremos al contorno $\Gamma\equiv\partial V$ del sólido dividido en tres partes Γ_u, Γ_σ y $\Gamma_{u\sigma}$ con las siguientes características (ver Figura 6-7)

$$\Gamma_u\bigcup\Gamma_\sigma\bigcup\Gamma_{u\sigma}=\Gamma\equiv\partial V$$
$$\Gamma_u\bigcap\Gamma_\sigma=\Gamma_u\bigcap\Gamma_{u\sigma}=\Gamma_{u\sigma}\bigcap\Gamma_\sigma=\emptyset\tag{6.46}$$

y en función de los mismos definiremos las *condiciones de contorno en el espacio*, es decir, aquellas que afectan a los argumentos espaciales (x,y,z) de las incógnitas (6.45) del problema:

- Contorno Γ_u: *condiciones de contorno en desplazamientos*:

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\mathbf{u}^*(\mathbf{x},t)\\&u_i(\mathbf{x},t)=u_i^*(\mathbf{x},t)\quad i\in\{1,2,3\}\end{aligned}\right\}\quad\forall\mathbf{x}\in\Gamma_u\quad\forall t\tag{6.47}$$

- Contorno Γ_σ: *condiciones de contorno en tensiones:*

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}=\mathbf{t}^*(\mathbf{x},t)\\&\sigma_{ij}(\mathbf{x},t)\cdot n_j=t_j^*(\mathbf{x},t)\quad i,j\in\{1,2,3\}\end{aligned}\right\}\quad\forall\mathbf{x}\in\Gamma_\sigma\quad\forall t\tag{6.48}$$

NOTA

En $\Gamma_{u\sigma}$ ciertas componentes (componentes *i*) tienen prescrito el desplazamiento y las restantes (componentes *j*) tienen prescrito el vector tracción.

- Contorno $\Gamma_{u\sigma}$: *condiciones de contorno mixtas (desplazamiento-tensión)*

$$\left.\begin{aligned}&u_i(\mathbf{x},t)=u_i^*(\mathbf{x},t)\\&\sigma_{jk}(\mathbf{x},t)\cdot n_k=t_j^*(\mathbf{x},t)\end{aligned}\right|\quad(i,j,k\in\{1,2,3\}\quad i\neq j)\quad\forall\mathbf{x}\in\Gamma_{u\sigma}\quad\forall t\tag{6.49}$$

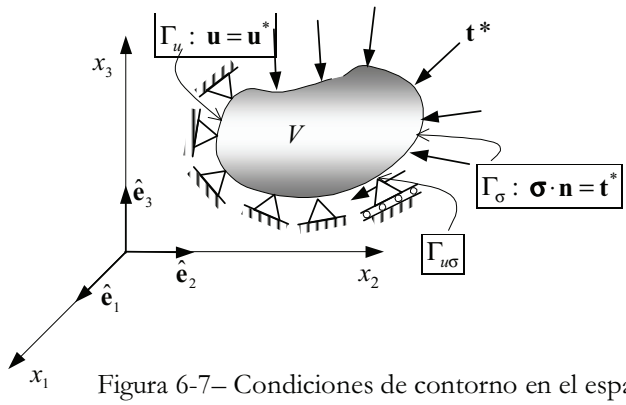


Figura 6-7– Condiciones de contorno en el espacio

Ejemplo 6-2 – En la viga de la Figura 6-8 se ejemplifican los diversos tipos de condiciones de contorno en el espacio.

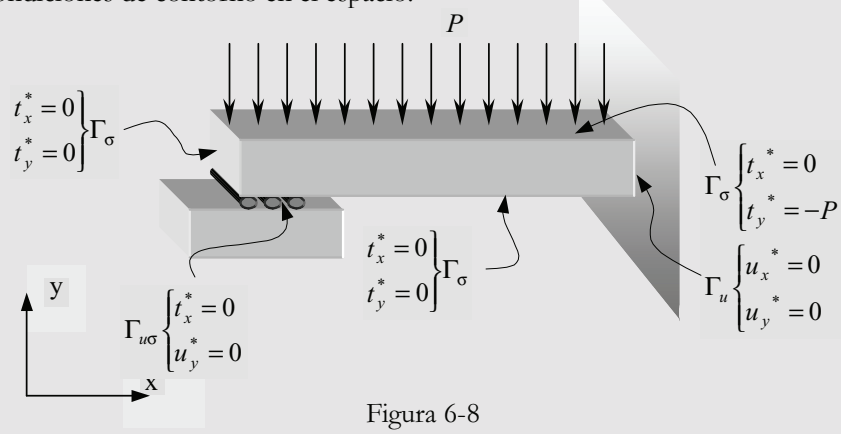

P
$t_x^* = 0$
$t_y^* = 0$
Γ_σ
$\Gamma_\sigma \begin{cases} t_x^* = 0 \\ t_y^* = -P \end{cases}$
$\Gamma_u \begin{cases} u_x^* = 0 \\ u_y^* = 0 \end{cases}$
$\Gamma_{u\sigma} \begin{cases} t_x^* = 0 \\ u_y^* = 0 \end{cases}$
y
x

Figura 6-8

6.6.2.2 Condiciones de contorno en el tiempo: condiciones iniciales

En general, en el instante inicial o de referencia, $t = 0$, serán conocidos los desplazamientos y la velocidad:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{0} \\ &\left.\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{\partial t}\right|_{t=0} \overset{not}{=} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \end{aligned}\right\} \quad \forall \mathbf{x} \in V \tag{6.50}$$

6.6.3 Problema cuasiestático

El sistema de ecuaciones (6.42) a (6.50) puede ser visualizado, desde un punto de vista mecánico, como un sistema de *acciones* o datos (las fuerzas másicas $\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$, el vector de tracción $\mathbf{t}^*(\mathbf{x},t)$, los desplazamientos impuestos $\mathbf{u}^*(\mathbf{x},t)$ y las velocidades iniciales $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$) que, insertadas en un *modelo* matemático constituido por las ecuaciones diferenciales de la sección 6.6.1 y las condiciones de contorno del apartado 6.6.2, proporciona la *respuesta* o solución en forma de los campos de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ y de tensiones $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$.

$$\underbrace{\left.\begin{matrix}\mathbf{b}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{t}^{*}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{u}^{*}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{v}_0(\mathbf{x})\end{matrix}\right\}}_{\text{not}} \Rightarrow \left\langle \begin{matrix}\text{MODELO}\\ \text{MATEMÁTICO:}\\ \text{E.D.P´s + c.c.}\end{matrix} \right\rangle \Rightarrow \underbrace{\left\{\begin{matrix}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)\\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)\end{matrix}\right.}_{\text{not}}$$

$\text{Acciones} = \mathbb{A}(\mathbf{x},t)$: $\qquad$ $\text{Respuestas} = \mathbb{R}(\mathbf{x},t)$ (6.51)

NOTA

En este caso (problema general), el problema se denomina *problema dinámico* .

En el caso más general, tanto las acciones como las respuestas dependerán del tiempo (ver Figura 6-9) y el sistema de EDP's deberá ser integrado tanto en las variables espaciales como en el tiempo ($\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$). Sin embargo, en ciertos casos, el espacio de integración puede ser reducido en la dimensión correspondiente al tiempo. Este es el caso de los denominados problemas cuasiestáticos.

Definición:

Problema elástico lineal cuasiestático: Problema elástico lineal en el que la aceleración se considera despreciable ($\mathbf{a} = \dfrac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} \approx \mathbf{0}$). Dicha hipótesis es aceptable siempre que *las acciones se apliquen muy lentamente.* En este caso puede suponerse que la variación de las acciones $\mathbb{A}$ con el tiempo es lenta ($\partial^2 \mathbb{A}/\partial t^2 \approx \mathbf{0}$) y, debido a la dependencia continua de los resultados respecto a los datos, la variación con el tiempo de la respuesta también es pequeña ($\partial^2 \mathbb{R}/\partial t^2 \approx \mathbf{0}$). En consecuencia, la segunda derivada temporal de la respuesta se considera despreciable y, en particular, $\dfrac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} \approx \mathbf{0}$

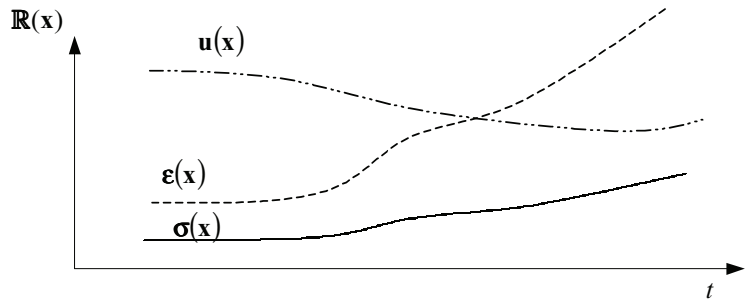


Figura 6-9 – Evolución de la respuesta con el tiempo

Para el problema cuasiestático las ecuaciones diferenciales de gobierno quedan como sigue:

- *Ecuación de Cauchy:*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) + \rho_0 \mathbf{b}(\mathbf{x},t) = \left(\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{\partial^2 t} \right) = \mathbf{0} \qquad (6.52)$$

ecuación que se conoce también como *ecuación de equilibrio*.

- *Ecuación constitutiva:*

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) = \lambda Tr(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t))\mathbf{1} + 2\mu\, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t) \qquad (6.53)$$

- *Ecuación geométrica*:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)=\boldsymbol{\nabla}^{S}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\otimes\boldsymbol{\nabla}+\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}\right) \tag{6.54}$$

que ya no involucran ninguna derivada temporal. El sistema de ecuaciones diferenciales sólo necesita ser integrado en el espacio (resuelto en $\mathbb{R}^3$) con las condiciones de contorno en el espacio del apartado 6.6.2.1. Por otra parte *el tiempo sólo juega un papel de parámetro descriptivo de la evolución de las acciones* que suelen describirse en función de denominado *factor de carga o pseudo-tiempo* $\lambda(t)$:

$$\underbrace{\left.\begin{matrix}\mathbf{b}(\mathbf{x},\lambda)\\ \mathbf{t}^{*}(\mathbf{x},\lambda)\\ \mathbf{u}^{*}(\mathbf{x},\lambda)\end{matrix}\right\}}_{\text{not}}\Rightarrow\left\langle\begin{matrix}\text{MODELO}\\ \text{MATEMÁTICO:}\\ \text{E.D.P´s}+\text{c.c.}\end{matrix}\right\rangle\Rightarrow\underbrace{\left\{\begin{matrix}\mathbf{u}(\mathbf{x},\lambda)\\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},\lambda)\\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},\lambda)\end{matrix}\right.}_{\text{not}} \tag{6.55}$$

$$\textit{Acciones}=\mathbb{A}(\mathbf{x},\lambda),\qquad \text{Respuesta}=\mathbb{R}(\mathbf{x},\lambda)$$

En otras palabras, para cada valor de las acciones (caracterizado por un valor fijo de λ^{*}) $\mathbb{A}(\mathbf{x},\lambda^{*})$ se obtiene una respuesta $\mathbb{R}(\mathbf{x},\lambda^{*})$. Variando el valor de λ^{*} se obtiene una familia de acciones y la correspondiente familia de respuestas.

Ejemplo 6-3 – *Aplicación a un problema típico de Resistencia de Materiales.*

Consideremos la ménsula de la Figura 6-10 con una fuerza $F(t)$ aplicada en el extremo. Bajo la hipótesis de problema cuasiestático, y ante una acción parametrizada del tipo λF^{*}, se puede conocer la respuesta (flecha en el extremo) $\delta(\lambda)=\lambda\dfrac{F^{*}l^{3}}{3EI}$ (solución de la Resistencia de Materiales).

Si $\lambda(t)$ tiene una evolución cualquiera con el tiempo, *el valor de* $\delta(t)=\delta(\lambda(t))$ *para cada instante de tiempo sólo depende del correspondiente valor de* λ.

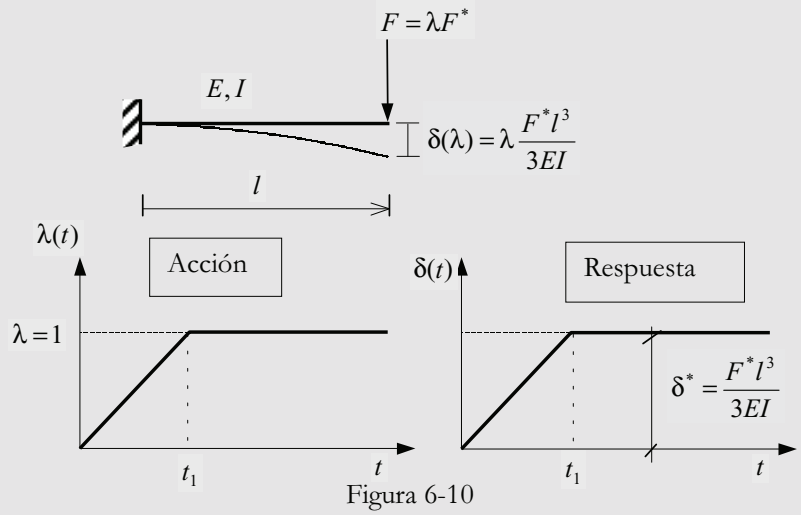


Figura 6-10

6.7 Resolución del problema elástico lineal

La resolución del problema elástico lineal puede hacerse típicamente con dos planteamientos distintos:

a) planteamiento en *desplazamientos*
b) planteamiento en *tensiones*.

Sus nombres respectivos provienen de cuál es la incógnita primal que se considera para el problema (desplazamientos o tensiones, respectivamente).

Observación 6-9

En la actualidad el planteamiento en desplazamientos tiene mayor aplicación puesto que en él están basados la mayoría de los métodos de resolución *numérica* del problema elástico lineal.

6.7.1 Planteamiento en desplazamientos: Ecuaciones de Navier

Consideremos las ecuaciones del problema elástico lineal:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho_0\mathbf{b}=\rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} && \text{(Ecuación de Cauchy)}\\ &\boldsymbol{\sigma}=\lambda Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1}+2\mu\boldsymbol{\varepsilon} && \text{(Ecuación constitutiva)}\\ &\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\nabla}^S\mathbf{u}=\frac{1}{2}(\mathbf{u}\otimes\boldsymbol{\nabla}+\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}) && \text{(Ecuación geométrica)}\end{aligned}\right\} \quad (6.56)$$

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_u:\ \mathbf{u}=\mathbf{u}^*\\ &\Gamma_\sigma:\ \mathbf{t}^*=\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\end{aligned}\right\} \text{ Condiciones de contorno en el espacio} \quad (6.57)$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{u}(\mathbf{x},0)=\mathbf{0}\\ &\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},0)=\mathbf{v}_0\end{aligned}\right\} \text{ Condiciones iniciales} \quad (6.58)$$

El objetivo es plantear un sistema reducido, en el que intervengan como incógnita sólo el campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$. El primer paso consiste en substituir en (6.56) la ecuación constitutiva en la ecuación de Cauchy:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho_0\mathbf{b}=\boldsymbol{\nabla}\cdot[\lambda Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1}+2\mu\boldsymbol{\varepsilon}]+\rho_0\mathbf{b}=\rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}\ \Rightarrow$$
$$\lambda\boldsymbol{\nabla}\cdot[Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1}]+2\mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}+\rho_0\mathbf{b}=\rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (6.59)$$

La ecuación (6.59) puede ser reelaborada teniendo en cuenta las siguientes identidades:

NOTA

Se define el operador *Laplaciano* de un vector $\mathbf{v}$ como:

$$\left[\nabla^2\mathbf{v}\right]_i \overset{def}{=} \frac{\partial^2 \mathrm{v_i}}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\left.\begin{aligned}(\nabla\cdot\boldsymbol{\varepsilon})_i &= \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}}_{(\nabla^2\mathbf{u})_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)}_{\nabla\cdot\mathbf{u}} = \frac{1}{2}(\nabla^2\mathbf{u})_i + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla\cdot\mathbf{u})}_{(\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}))_i} = \\ &= \left[\frac{1}{2}\nabla^2\mathbf{u}+\frac{1}{2}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})\right]_i \qquad i\in\{1,2,3\}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \tag{6.60}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \nabla\cdot\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})+\frac{1}{2}\nabla^2\mathbf{u}}$$

$$\left.\begin{aligned}\left[\nabla\cdot(Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1})\right]_i &= \frac{\partial}{\partial x_j}(\varepsilon_{ll}\,\delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\delta_{ij}\right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)}_{\nabla\cdot\mathbf{u}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla\cdot\mathbf{u})}_{(\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}))_i} = \left[\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})\right]_i \qquad i\in\{1,2,3\}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \tag{6.61}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \nabla\cdot(Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})}$$

y substituyendo las ecuaciones (6.60) y (6.61) en la (6.59):

$$\lambda\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})+\mu\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})+\mu\nabla^2\mathbf{u}+\rho_0\mathbf{b} = \rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}\Rightarrow \tag{6.62}$$

$$\boxed{\text{Ecuaciones de Navier}\begin{cases}(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})+\mu\nabla^2\mathbf{u}+\rho_0\mathbf{b} = \rho_0\dfrac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \\ (\lambda+\mu)u_{j,ji}+\mu\,u_{i,jj}+\rho_0 b_i = \rho_0\ddot{u}_i \qquad i\in\{1,2,3\}\end{cases}} \tag{6.63}$$

que constituye un sistema de EDP's de segundo orden en los desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ (que debe ser, por lo tanto, integrado en $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+$), recibiendo el nombre de *ecuaciones de Navier*.

Las condiciones de contorno pueden escribirse también en función de los desplazamientos como sigue. Substituyendo la ecuación constitutiva (6.56) en la condición de contorno en Γ_σ de (6.57):

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^* = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} &= \left[\lambda Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1}+2\mu\boldsymbol{\varepsilon}\right]\cdot\mathbf{n} = \lambda\underbrace{(Tr(\boldsymbol{\varepsilon}))}_{\nabla\cdot\mathbf{u}}\mathbf{n}+2\mu\underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\nabla^S\cdot\mathbf{u}}\cdot\mathbf{n} = \\ &= \lambda(\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{n}+2\mu\frac{1}{2}(\mathbf{u}\otimes\nabla+\nabla\otimes\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} = \\ &= \lambda(\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{n}+\mu(\mathbf{u}\otimes\nabla+\nabla\otimes\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}\end{aligned} \tag{6.64}$$

y las condiciones de contorno en el espacio (6.57), escritas ahora en función de los desplazamientos, quedan:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* \\ u_i &= u_i^* \quad i \in \{1,2,3\} \end{aligned}\right\} \text{ en } \Gamma_u$$
$$\left.\begin{aligned} \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + \mu(\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t}^* \\ \lambda u_{l,l} n_i + \mu(u_{i,j} n_j + u_{j,i} n_j) &= t_i^* \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{aligned}\right\} \text{ en } \Gamma_\sigma \tag{6.65}$$

Las condiciones iniciales (6.58) permanecen inalteradas. Una vez integrado el sistema (6.63) se dispone del campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$. Por derivación del mismo y substitución en las ecuaciones geométricas en (6.56), se obtiene el campo de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$, y substituyendo finalmente en la ecuación constitutiva, se obtiene el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$.

6.7.2 Planteamiento en tensiones: Ecuaciones de Beltrami-Michell

El método es solamente planteable para el caso cuasiestático del apartado 6.6.3. Consideremos entonces las ecuaciones del problema elástico lineal cuasiestático:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} && \text{(Ecuación de equilibrio)} \\ &\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} && \text{(Ecuación constitutiva inversa)} \\ &\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) && \text{(Ecuación geométrica)} \end{aligned}\right\} \tag{6.66}$$

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_u &: \ \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \\ \Gamma_\sigma &: \ \mathbf{t}^* = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \end{aligned}\right\} \text{ Condiciones de contorno en el espacio} \tag{6.67}$$

donde en (6.66) se ha considerado la ecuación constitutiva inversa (6.24) (deformaciones en función de las tensiones).

NOTA

La deducción de las ecuaciones de compatibilidad se llevó a cabo en el capítulo 3, apartado 3.3

El punto de partida del planteamiento en tensiones son las ecuaciones geométricas en (6.66) de las que, por derivaciones sucesivas, se eliminan los desplazamientos obteniéndose las *ecuaciones de compatibilidad*:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \qquad i,j,k,l \in \{1,2,3\} \tag{6.68}$$

La deducción de las ecuaciones del problema se hace en los siguientes pasos:

a) Se substituye la ecuación constitutiva de (6.66) en las ecuaciones de compatibilidad (6.68).
b) Se substituye en la ecuación resultante la ecuación de equilibrio de (6.66).

El resultado es el siguiente conjunto de ecuaciones:

Ecuaciones de Beltrami - Michell :

$$\nabla^2\sigma_{ij}+\frac{1}{1+\nu}\sigma_{ll,ij}=-\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}(\rho_0 b_l)_{,l}-(\rho_0 b_i)_{,j}-(\rho_0 b_j)_{,i}\quad i,j\in\{1,2,3\} \tag{6.69}$$

Las ecuaciones (6.69) reciben el nombre de *ecuaciones de Beltrami-Michell* y constituyen un sistema de EDP's de segundo orden en las incógnitas $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ que deben ser resueltas en $\mathbb{R}^3$.

Como *condiciones de contorno* de dicho sistema se tienen las propias ecuaciones de equilibrio en (6.66), que al tratarse de un sistema de EDP's de primer orden actúan como condiciones de contorno del sistema de segundo orden (6.69), y las condiciones de contorno en Γ_σ:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho_0\mathbf{b}=\mathbf{0} \qquad \text{(Ecuación de equilibrio)} \tag{6.70}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{t}^* \ \text{ en } \Gamma_\sigma \qquad \text{(Condiciones de contorno en } \Gamma_\sigma\text{)} \tag{6.71}$$

Una vez integrado el sistema (6.69) se dispone del campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$. A partir de éste, mediante substitución en las ecuación constitutiva inversa en (6.66), se obtienen las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$. Sin embargo, para obtener el campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ es necesario integrar las ecuaciones geométricas con las condiciones de contorno en Γ_u:

NOTA

En el capítulo 3, apartado 3.4.2, se proporcionó un procedimiento analítico para integrar dichas ecuaciones geométricas.

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})=\dfrac{1}{2}\left(\mathbf{u}(\mathbf{x})\otimes\nabla+\nabla\otimes\mathbf{u}(\mathbf{x})\right) & \mathbf{x}\in V\\ \mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) & \forall\mathbf{x}\in\Gamma_u\end{cases} \tag{6.72}$$

Se trata, por tanto de un segundo sistema de EDP's de primer orden que hay que integrar en $\mathbb{R}^3$.

Observación 6-10

La necesidad de *integrar* el segundo sistema (6.72) (cuando se plantea el problema en tensiones) constituye una desventaja (frente al planteamiento en desplazamientos del apartado 6.7.1) cuando se utilizan métodos numéricos para resolver el problema elástico lineal.

6.8 Unicidad de la solución del problema elástico lineal

Teorema:

La solución $\mathbb{R}(\mathbf{x},t)\equiv\begin{Bmatrix}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)\\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)\end{Bmatrix}$ del problema elástico lineal (6.42) a (6.44) es única.

Demostración:

Consideremos el problema elástico lineal esquematizado en la Figura 6-11 sujeto a las acciones definidas por $\mathbb{A}(\mathbf{x},t) \equiv \left[\mathbf{b}(\mathbf{x},t),\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x},t),\ \mathbf{t}^*(\mathbf{x},t),\ \mathbf{v}_0(\mathbf{x})\right]^T$, en los dominios V, Γ_u, Γ_σ y V, respectivamente, (cumpliéndose que $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \partial V$ y $\Gamma_\sigma \cap \Gamma_u = \varnothing$).

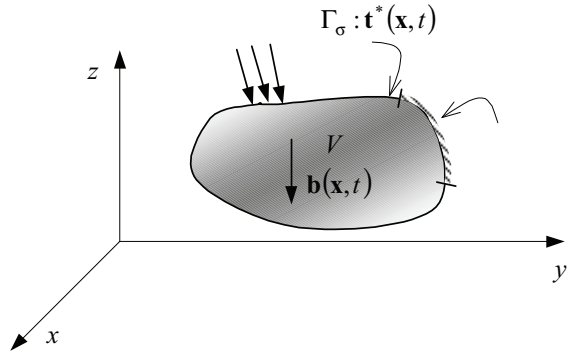


Figura 6-11 – Problema elástico lineal

Las posibles soluciones $\mathbb{R}(\mathbf{x},t) \equiv \left[\mathbf{u}(\mathbf{x},t),\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t),\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)\right]^T$ del problema elástico lineal cuasi-estático deben verificar las ecuaciones:

Ecuación de Cauchy:	$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \dfrac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$
Ecuación constitutiva:	$\boldsymbol{\sigma} = \lambda Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$ (6.73)
Ecuación geométrica:	$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u})$
Condiciones de contorno en el espacio:	$\begin{cases} \Gamma_u : & \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \\ \Gamma_\sigma : & \mathbf{t}^* = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \end{cases}$ (6.74)
Condiciones iniciales:	$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},0) = \mathbf{v}_0 \end{cases}$ (6.75)

La demostración de la unicidad de la solución se hace como sigue. Supondremos que la solución no es única, es decir, que existen dos soluciones distintas al problema:

$$\mathbb{R}^{(1)}(\mathbf{x},t) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x},t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{x},t) \\ \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x},t) \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbb{R}^{(2)}(\mathbf{x},t) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x},t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}(\mathbf{x},t) \\ \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x},t) \end{Bmatrix} \tag{6.76}$$

$$\mathbb{R}^{(1)} \neq \mathbb{R}^{(2)}$$

que, por lo tanto, cumplen las ecuaciones (6.73) a (6.75) y son respuestas elásticas a la acción $\mathbb{A}(\mathbf{x},t) \equiv \left[\mathbf{b}(\mathbf{x},t),\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x},t),\ \mathbf{t}^*(\mathbf{x},t),\ \mathbf{v}_0(\mathbf{x})\right]^T$. Consideremos ahora la posible respuesta constituida por la diferencia $\mathbb{R}^{(2)} - \mathbb{R}^{(1)}$:

$$\tilde{\mathbb{R}} \overset{def}{=} \mathbb{R}^{(2)}(\mathbf{x},t) - \mathbb{R}^{(1)}(\mathbf{x},t) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x},t) - \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x},t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}(\mathbf{x},t) - \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{x},t) \\ \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x},t) - \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x},t) \end{Bmatrix} \overset{def}{=} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x},t) \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x},t) \end{Bmatrix} \tag{6.77}$$

Observamos que la respuesta $\tilde{\mathbb{R}}$ cumple las siguientes ecuaciones:

NOTA

Se aprovecha aquí la circunstancia de que el operador nabla $(\nabla * (\bullet))$ es un *operador lineal*, es decir: $\nabla * (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla * \mathbf{a} + \nabla * \mathbf{b}$ donde * simboliza cualquier tipo de operación diferencial. Asimismo el operador $\dfrac{\partial^2(\bullet,t)}{\partial t^2}$ es también un operador lineal.

- *Ecuación de Cauchy con* $\mathbf{b} = \mathbf{0}$

$$\left.\begin{aligned} &\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x},t) = \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x},t) - \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x},t)\right) = \\ &= \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}}_{-\rho_0 \mathbf{b} + \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(2)}}{\partial t^2}} - \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(1)}}_{\rho_0 \mathbf{b} + \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(1)}}{\partial t^2}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(2)}}{\partial t} - \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tag{6.78}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x},t) = \rho_0 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t^2}$$

- *Ecuación constitutiva*

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x},t) = \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x},t) - \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x},t) = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} - \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \mathbb{C} : \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}\right) = \mathbb{C} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{6.79}$$

- *Ecuación geométrica*

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x},t) = \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \nabla^S \mathbf{u}^{(2)} - \nabla^S \mathbf{u}^{(1)} = \nabla^S \left(\mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{u}^{(1)}\right) = \nabla^S \tilde{\mathbf{u}} \tag{6.80}$$

NOTA

Se aplica aquí la propiedad de que el operador $\mathbb{C}:$ es un *operador lineal* es decir: $\mathbb{C} : (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbb{C} : \mathbf{a} + \mathbb{C} : \mathbf{b}$

- *Condiciones de contorno en* Γ_u *con* $\mathbf{u}^* = \mathbf{0}$

$$\Gamma_u \rightarrow \begin{cases} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \quad \forall t \Rightarrow \\ \dfrac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = \dot{\tilde{\mathbf{u}}} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{6.81}$$

- *Condiciones de contorno en* Γ_σ *con* $\mathbf{t}^* = \mathbf{0}$

$$\Gamma_\sigma \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \left(\boldsymbol{\sigma}^{(2)} - \boldsymbol{\sigma}^{(1)}\right) \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^* - \mathbf{t}^* = \mathbf{0} \tag{6.82}$$

- *Condiciones iniciales con* $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x},0) = \underbrace{\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x},0)}_{=\mathbf{0}} - \underbrace{\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x},0)}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{0} \\ \dot{\tilde{\mathbf{u}}}(\mathbf{x},0) = \underbrace{\dot{\mathbf{u}}^{(2)}(\mathbf{x},0)}_{=\mathbf{v}_0} - \underbrace{\dot{\mathbf{u}}^{(1)}(\mathbf{x},0)}_{=\mathbf{v}_0} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{6.83}$$

Consideremos ahora el cálculo de la siguiente integral:

$$\int_{\partial V} \mathbf{n}\cdot(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\dot{\tilde{\mathbf{u}}})\,dS = \int_{\Gamma_u\cup\Gamma_\sigma} \overbrace{(\mathbf{n}\cdot\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}^{=0\text{ en }\Gamma_\sigma}\cdot\underbrace{\dot{\tilde{\mathbf{u}}}}_{=0\text{ en }\Gamma_u}\,dS \overset{\text{Teorema de la divergencia}}{=} \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\dot{\tilde{\mathbf{u}}})\,dV = 0 \tag{6.84}$$

donde se han tenido en cuenta las condiciones (6.81) y (6.82). Operando sobre el último integrando de la ecuación (6.84), se obtiene:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla}\cdot(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\dot{\tilde{\mathbf{u}}}) = \overbrace{(\boldsymbol{\nabla}\cdot\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}^{\rho_0\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{u}}}{\partial t^2}}\cdot\dot{\tilde{\mathbf{u}}} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}:(\boldsymbol{\nabla}\dot{\tilde{\mathbf{u}}}) = \rho_0\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{u}}}{\partial t^2}\cdot\dot{\tilde{\mathbf{u}}} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}:(\boldsymbol{\nabla}\dot{\tilde{\mathbf{u}}})^T \\ \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\tilde{\sigma}_{ij}\,\dot{\tilde{u}}_j\right) = \dfrac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_i}\dot{\tilde{u}}_j + \tilde{\sigma}_{ij}\dfrac{\partial\dot{\tilde{u}}_j}{\partial x_i} = \rho_0\dfrac{\partial^2\tilde{u}_j}{\partial t^2}\dot{\tilde{u}}_j + \tilde{\sigma}_{ji}\dfrac{\partial\dot{\tilde{u}}_j}{\partial x_i} \quad i,j\in\{1,2,3\} \end{cases} \tag{6.85}$$

donde se ha aplicado la condición (6.78) ($\boldsymbol{\nabla}\cdot\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \rho_0\dfrac{\partial^2\tilde{\mathbf{u}}}{\partial t^2}$). Por otra parte:

NOTA

Se tiene en cuenta aquí que $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ es un tensor simétrico y $\dot{\tilde{\boldsymbol{\Omega}}}$ un tensor antisimétrico con lo que $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\tilde{\boldsymbol{\Omega}}} = \tilde{\sigma}_{ij}\dot{\tilde{\Omega}}_{ij} = 0$.

$$\begin{gathered} (\boldsymbol{\nabla}\dot{\tilde{\mathbf{u}}})^T = \dot{\tilde{\mathbf{u}}}\otimes\boldsymbol{\nabla} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\dot{\tilde{\mathbf{u}}}\otimes\boldsymbol{\nabla}+\boldsymbol{\nabla}\otimes\dot{\tilde{\mathbf{u}}}\right)}_{\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}=\boldsymbol{\nabla}^S\dot{\tilde{\mathbf{u}}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\dot{\tilde{\mathbf{u}}}\otimes\boldsymbol{\nabla}-\boldsymbol{\nabla}\otimes\dot{\tilde{\mathbf{u}}}\right)}_{\dot{\tilde{\boldsymbol{\Omega}}}=\boldsymbol{\nabla}^a\dot{\tilde{\mathbf{u}}}} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}+\dot{\tilde{\boldsymbol{\Omega}}} \Rightarrow \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}:(\boldsymbol{\nabla}\dot{\tilde{\mathbf{u}}})^T = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\tilde{\boldsymbol{\Omega}}}}_{=\mathbf{0}} \Rightarrow \qquad \boxed{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:(\boldsymbol{\nabla}\dot{\tilde{\mathbf{u}}})^T = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}} \end{gathered} \tag{6.86}$$

Asimismo puede escribirse :

NOTA

Se define aquí: $|\tilde{\mathbf{v}}| \overset{\text{def}}{=} \tilde{\mathrm{v}}$.

$$\rho_0\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{u}}}{\partial t^2}\cdot\dot{\tilde{\mathbf{u}}} = \rho_0\frac{\partial\dot{\tilde{\mathbf{u}}}}{\partial t}\cdot\tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{2}\rho_0\frac{\partial(\dot{\tilde{\mathbf{u}}}\cdot\tilde{\mathbf{u}})}{\partial t} = \frac{1}{2}\rho_0\frac{d(\overbrace{\tilde{\mathbf{v}}\cdot\tilde{\mathbf{v}}}^{|\tilde{\mathbf{v}}|^2=\tilde{\mathrm{v}}^2})}{dt} = \rho_0\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\tilde{\mathrm{v}}^2\right) \tag{6.87}$$

$$\boxed{\rho_0\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{u}}}{\partial t^2}\cdot\dot{\tilde{\mathbf{u}}} = \rho_0\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\tilde{\mathrm{v}}^2\right)}$$

Substituyendo las ecuaciones (6.87) y (6.86) en la (6.85) y ésta en la (6.84) y teniendo en cuenta además la definición de la energía interna $\dfrac{d\tilde{\mathcal{U}}}{dt} = \int_V \tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\,dV$ de la ecuación (6.10):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\dot{\tilde{\mathbf{u}}})\,dV = \int_V \rho_0\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\tilde{\mathrm{v}}^2\right)dV + \int_V \tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\,dV = \\ &= \underbrace{\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\rho_0\tilde{\mathrm{v}}^2\,dV}_{\frac{d\tilde{\mathcal{K}}}{dt}} + \underbrace{\int_V \tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\,dV}_{\frac{d\tilde{\mathcal{U}}}{dt}} = 0 \Rightarrow \end{aligned} \tag{6.88}$$

$$\boxed{\frac{d\tilde{\mathcal{K}}}{dt}+\frac{d\tilde{\mathcal{U}}}{dt}=\frac{d}{dt}(\tilde{\mathcal{K}}+\tilde{\mathcal{U}})=0 \quad \forall t\geq 0} \tag{6.89}$$

Obsérvese sin embargo que en el instante inicial $t=0$ se cumple (ver ecuación (6.10), (6.13) y (6.83)):

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\mathcal{K}}\big|_{t=0}&=\int_V \frac{1}{2}\rho_0\,\tilde{\mathbf{v}}^2\big|_{t=0}\,dV=\int_V \frac{1}{2}\rho_0\,\underbrace{\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_0}_{\tilde{\mathbf{v}}_0}\cdot\tilde{\mathbf{v}}_0\,dV=0\\ \tilde{\mathcal{U}}\big|_{t=0}&=\int_V \underbrace{\hat{u}(\mathbf{x},t)\big|_{t=0}}_{\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}:\mathbb{C}:\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\,dV=\int_V \frac{1}{2}\underbrace{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}|_{t=0}}_{=\mathbf{0}}:\mathbb{C}:\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}|_{t=0}\,dV=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow(\tilde{\mathcal{K}}+\tilde{\mathcal{U}})\big|_{t=0}=0 \tag{6.90}$$

y la integración de la ecuación (6.89) con la condición inicial (6.90) lleva a:

$$\boxed{\tilde{\mathcal{K}}+\tilde{\mathcal{U}}=0 \quad \forall t\geq 0} \tag{6.91}$$

donde:

$$\tilde{\mathcal{K}}=\int_V \frac{1}{2}\underbrace{\rho_0\tilde{\mathbf{v}}^2}_{\geq 0}\,dV\geq 0 \quad \forall t\geq 0 \tag{6.92}$$

La comparación de las ecuaciones (6.92) y (6.91) lleva necesariamente a la conclusión:

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\mathcal{K}}+\tilde{\mathcal{U}}=0\\ &\tilde{\mathcal{K}}\geq 0\end{aligned}\right\}\ \forall t\geq 0\Rightarrow\tilde{\mathcal{U}}(t)=\int_V \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}:\mathbb{C}:\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\;dV\leq 0 \quad \forall t\geq 0 \tag{6.93}$$

Por otra parte, al ser el tensor constitutivo elástico $\mathbb{C}$ definido positivo (ver ecuación (6.32)) :

$$\begin{aligned}&\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x},t):\mathbb{C}:\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x},t)\geq 0 \qquad \forall\mathbf{x}\in V \quad \forall t\geq 0 \;\Rightarrow\\ &\tilde{\mathcal{U}}(t)=\int_V \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}:\mathbb{C}:\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\;dV\geq 0 \quad \forall t\geq 0\end{aligned} \tag{6.94}$$

y la comparación de las ecuaciones (6.94)y (6.93) necesariamente conduce a :

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\mathcal{U}}(t)\leq 0\\ &\tilde{\mathcal{U}}(t)\geq 0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\tilde{\mathcal{U}}(t)=\int_V \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}:\mathbb{C}:\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\;dV=0 \quad \forall t\geq 0 \tag{6.95}$$

NOTA

Se aplica aquí el siguiente teorema del cálculo integral: Si $\phi(\mathbf{x})\geq 0$ y $\int_\Omega \phi(\mathbf{x})\,d\Omega=0\Rightarrow \phi(\mathbf{x})=0\ \forall\mathbf{x}\in\Omega$

Recurriendo de nuevo a la condición de definido positivo del tensor $\mathbb{C}$:

$$\tilde{\mathcal{U}}(t)=\int_V \frac{1}{2}\underbrace{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}:\mathbb{C}:\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\geq 0}\,dV=0 \quad \forall t\geq 0\Rightarrow\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}:\mathbb{C}:\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=0 \quad \forall\mathbf{x} \quad \forall t\geq 0 \tag{6.96}$$

y, necesariamente, de la condición de definido positivo de $\mathbb{C}$ se deduce que

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}:\mathbb{C}:\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=0\Leftrightarrow\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x},t)=\mathbf{0} \quad \Rightarrow\forall\mathbf{x} \quad \forall t\geq 0 \tag{6.97}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x},t)=\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)}-\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)}=\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)}} \tag{6.98}$$

Por otra parte substituyendo la ecuación (6.98) en la (6.80), se tiene:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x},t)=\nabla^S\cdot\tilde{\mathbf{u}}=0\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=0\qquad i,j\in\{1,2,3\}\tag{6.99}$$

La ecuación (6.99) es un sistema de seis EDP's homogéneo y de primer orden. Su integración conduce a la solución:

NOTA

Esta solución puede obtenerse sin más que aplicar la metodología de integración del campo de deformaciones del capítulo 3, apartado 3.4.2.

$$\begin{cases}\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)=\underbrace{\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\cdot\mathbf{x}}_{\text{rotación}}+\underbrace{\tilde{\mathbf{c}}}_{\text{traslación}}\\ \tilde{\boldsymbol{\Omega}}\equiv\begin{bmatrix}0&-\tilde{\theta}_3&\tilde{\theta}_2\\ \tilde{\theta}_3&0&-\tilde{\theta}_1\\ -\tilde{\theta}_2&\tilde{\theta}_1&0\end{bmatrix}\quad;\tilde{\mathbf{c}}\equiv\begin{bmatrix}\tilde{c}_1\\ \tilde{c}_2\\ \tilde{c}_3\end{bmatrix}\end{cases}\tag{6.100}$$

donde $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ es un tensor antisimétrico (tensor de rotación dependiente de tres constantes $\{\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2,\tilde{\theta}_3\}$) y $\tilde{\mathbf{c}}$ un vector constante equivalente a una traslación. En definitiva, la solución (6.99) al sistema (6.100) son los desplazamientos $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)$ compatibles con una deformación nula $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x},t)=\mathbf{0}$ que corresponden a un desplazamiento de sólido rígido. Las constantes de integración en $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ y $\tilde{\mathbf{c}}$ se determinan imponiendo las condiciones de contorno (6.81) ($\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)=\mathbf{0}\ \ \forall\mathbf{x}\in\Gamma_u$) por lo que, si el movimiento de sólido rígido está impedido a través de las restricciones en Γ_u, se obtiene $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}=\mathbf{0}$ y $\tilde{\mathbf{c}}=\mathbf{0}$. En definitiva:

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)=\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\cdot\mathbf{x}+\tilde{\mathbf{c}}\\ &\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\equiv\mathbf{0}\quad;\tilde{\mathbf{c}}\equiv\mathbf{0}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)=\mathbf{u}^{(2)}-\mathbf{u}^{(1)}=\mathbf{0}\Rightarrow\boxed{\mathbf{u}^{(2)}=\mathbf{u}^{(1)}}\tag{6.101}$$

Finalmente substituyendo la ecuación (6.98) ($\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x},t)=\mathbf{0}$) en la (6.79), se obtiene:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x},t)=\mathbb{C}:\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=\mathbf{0}=\boldsymbol{\sigma}^{(2)}-\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\ \Rightarrow\ \boxed{\boldsymbol{\sigma}^{(2)}=\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}\tag{6.102}$$

Observando las ecuaciones (6.98), (6.101) y (6.102), puede concluirse:

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{u}^{(2)}=\mathbf{u}^{(1)}\\ &\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)}=\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)}\\ &\boldsymbol{\sigma}^{(2)}=\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\mathbb{R}^{(2)}=\mathbb{R}^{(1)}\tag{6.103}$$

Luego *la solución es única* (c.q.d).

6.9 Principio de Saint-Venant

Es un principio empírico que no tiene una demostración rigurosa. Supongamos un sólido Ω, sometido a un sistema de fuerzas en su contorno caracterizadas por el vector tracción $\mathbf{t}^*$, ver Figura 6-12. Dichas acciones darán lugar a una solución o respuesta en desplazamientos, deformaciones y tensiones $\mathbb{R}^{(I)}(\mathbf{x},t)\equiv\left[\mathbf{u}^{(I)}(\mathbf{x},t),\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(I)}(\mathbf{x},t),\ \boldsymbol{\sigma}^{(I)}(\mathbf{x},t)\right]^T$. Consideremos ahora una parte $\hat{\Gamma}$ del contorno Γ_σ ($\hat{\Gamma}\subset\Gamma_\sigma$) de dicho medio, cuya dimensión típica es ℓ, y

RECORDATORIO

Se dice que dos sistemas de fuerzas $\mathbf{t}^{(\mathrm{I})}$ y $\mathbf{t}^{(\mathrm{II})}$ son *estáticamente equivalentes* si su resultante (fuerzas y momentos) es la misma.

substituyamos el sistema de acciones en dicho contorno, $\mathbf{t}^{(\mathrm{I})}$, por otro sistema $\mathbf{t}^{(\mathrm{II})}$, *estáticamente equivalente* a $\mathbf{t}^{(\mathrm{I})}$, sin modificar las acciones en el resto de Γ_σ. Al modificar las acciones, es de suponer que la correspondiente respuesta $\mathbb{R}^{(\mathrm{II})}(\mathbf{x},t) \equiv \left[\mathbf{u}^{(\mathrm{II})}(\mathbf{x},t),\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{II})}(\mathbf{x},t),\ \boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{II})}(\mathbf{x},t)\right]^T$ será distinta.

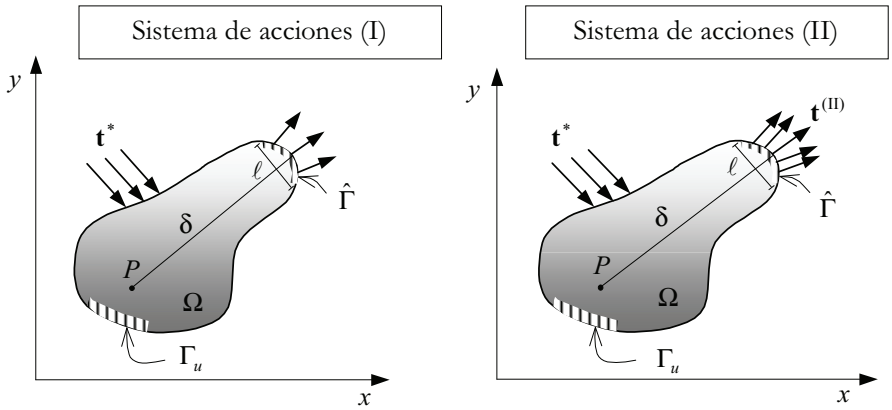


Figura 6-12 – Principio de Saint-Venant

El principio de Saint-Venant establece que, para puntos del dominio Ω suficientemente alejados del contorno $\hat{\Gamma}$, la solución en ambos casos es prácticamente la misma, es decir, para un punto P del interior de Ω se cumple:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{u}^{(\mathrm{I})}(\mathbf{x}_P,t) &\approx \mathbf{u}^{(\mathrm{II})}(\mathbf{x}_P,t)\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{I})}(\mathbf{x}_P,t) &\approx \boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{II})}(\mathbf{x}_P,t)\\ \boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{I})}(\mathbf{x}_P,t) &\approx \boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{II})}(\mathbf{x}_P,t)\end{aligned}\right\} \quad \forall P \mid \delta >> \ell \tag{6.104}$$

En otras palabras, si la distancia δ del punto considerado a la parte del contorno en la que se han modificado las acciones es suficientemente grande comparada con la dimensión ℓ de la zona modificada, la respuesta en dicho punto es equivalente en ambos casos.

Ejemplo 6-4 – El principio de Saint-Venant es frecuentemente utilizado en la Resistencia de Materiales y resulta fundamental para la introducción del concepto de *esfuerzo*.

Supongamos una viga (o pieza prismática) de sección transversal A sometida a una fuerza puntual F de tracción en sus extremos, ver Figura 6-13. La solución exacta del problema elástico original (sistema (I) en la figura) es extremadamente complicada, especialmente en la proximidad de los puntos de aplicación de las fuerzas puntuales. Si sustituimos ahora las fuerzas F por un sistema estáticamente equivalente de tracciones uniformemente distribuidas en la sección extrema $\sigma = F/A$ (sistema (II) en la figura), la solución elástica del correspondiente problema es extremadamente simple y coincide (para coeficiente de Poisson $\nu = 0$) con la solución ante esfuerzo axil proporcionada por la Resistencia de Materiales (distribución de tensiones uniforme sobre toda la pieza $\sigma_x = F/A$). El principio de Saint-Venant permite aproximar la solución (I) por la solución (II) a suficiente distancia (una o dos veces el canto)

de los extremos de la viga y dimensionar a efectos prácticos las características resistentes de la pieza.

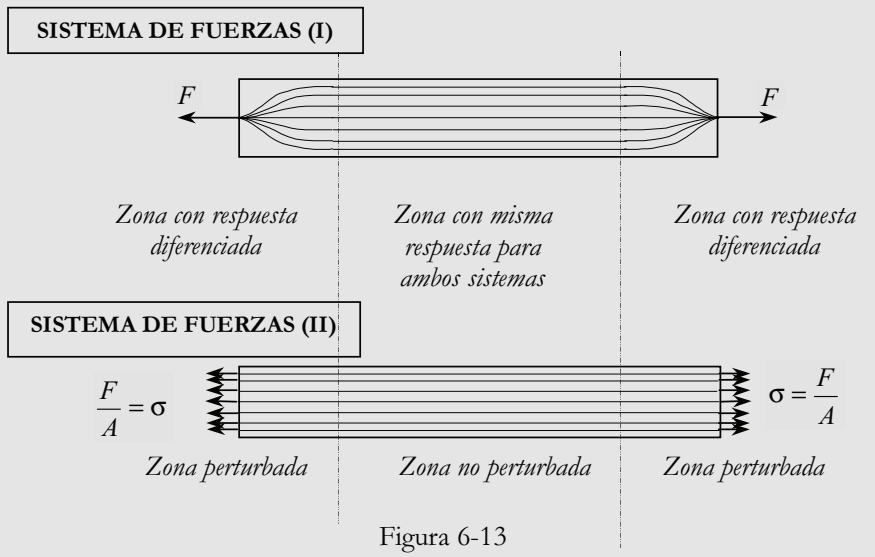


Figura 6-13

6.10 Termoelasticidad lineal. Tensiones y deformaciones térmicas

La principal diferencia de la termoelasticidad lineal, respecto a la elasticidad lineal tratada hasta aquí, es que deja de suponerse que el proceso de deformación es isotérmico (ver apartado 6.1). Aquí se incluyen los efectos térmicos y se considera que la temperatura $\theta(\mathbf{x},t)$ evoluciona con el tiempo, es decir:

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{x},t) &\neq \theta(\mathbf{x},0) \overset{not}{=} \theta_0 \\ \dot{\theta}(\mathbf{x},t) &= \frac{\partial \theta(\mathbf{x},t)}{\partial t} \neq 0 \end{aligned} \tag{6.105}$$

Sin embargo, sigue manteniéndose la hipótesis de que los procesos son adiabáticos (lentos) y que, por tanto:

$$\rho_0 r - \nabla \cdot \mathbf{q} \approx 0 \tag{6.106}$$

6.10.1 Ecuación constitutiva termoelástica lineal

La ley de Hooke (6.6) se generaliza en este caso a:

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta}(\theta - \theta_0) \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}(\theta - \theta_0) \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{cases}} \tag{6.107}$$

donde $\mathbb{C}$ es el tensor de constantes elásticas definido en (6.7), $\theta(\mathbf{x},t)$ es el campo de temperaturas, $\theta_0(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x},0)$ es la distribución de temperaturas en el estado neutro (configuración de referencia) y $\boldsymbol{\beta}$ es el tensor (simétrico) de propiedades térmicas:

$$\boxed{\text{Tensor de propiedades térmicas} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^T \\ \beta_{ij} = \beta_{ji} \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{cases}} \tag{6.108}$$

NOTA

La expresión más general de un *tensor isótropo de segundo orden* es : $\boldsymbol{\beta} = \beta \mathbf{1} \quad \forall \beta$

Para el caso de *material isótropo* el tensor $\mathbb{C}$ debe ser un tensor de cuarto orden isótropo y $\boldsymbol{\beta}$ uno isótropo de segundo orden, es decir:

$$\begin{cases} \mathbb{C} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I} \\ \mathbb{C}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \left[\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right] \quad i,j,k,l \in \{1,2,3\} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta} = \beta \, \mathbf{1} \\ \beta_{ij} = \beta \, \delta_{ij} \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{6.109}$$

donde ahora aparece una sola propiedad térmica β además de las constantes elásticas λ y μ. Sustituyendo la ecuación (6.109) en la ecuación constitutiva (6.107) y definiendo $(\theta - \theta_0) \overset{not}{=} \Delta\theta$, se obtiene:

$$\boxed{\text{Ecuación constitutiva para material termo - elástico lineal isótropo} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \lambda Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \, \mathbf{1} + 2\mu \, \boldsymbol{\varepsilon} - \beta \Delta\theta \, \mathbf{1} \\ \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \, \varepsilon_{ij} - \beta \, \Delta\theta \, \delta_{ij} \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{cases}} \tag{6.110}$$

6.10.2 Ecuación constitutiva inversa

La ecuación (6.110) puede invertirse como sigue:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\theta \boldsymbol{\beta} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + \Delta\theta \underbrace{\mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + \Delta\theta \, \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha} \overset{def}{=} \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\beta} \rightarrow \text{Tensor de coeficientes de dilatación térmica} \end{cases} \tag{6.111}$$

donde $\boldsymbol{\alpha}$ es un tensor de segundo orden (simétrico) que involucra seis propiedades térmicas denominadas *coeficientes de dilatación térmica*. Para el caso isotrópo, de acuerdo con las ecuaciones (6.110) y (6.24), puede escribirse, tras una cierta manipulación algebraica:

$$\boxed{\text{Ecuación constitutiva inversa para material termo - elástico lineal isótropo} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = -\dfrac{\nu}{E} Tr(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + \dfrac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} + \alpha \Delta\theta \, \mathbf{1} \\ \varepsilon_{ij} = -\dfrac{\nu}{E} \sigma_{ll} \delta_{ij} + \dfrac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} + \alpha \Delta\theta \delta_{ij} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i,j \in \{1,2,3\} \end{cases}} \tag{6.112}$$

siendo α un escalar denominado coeficiente de dilatación térmica relacionado con la propiedad térmica β de la ecuación (6.110) mediante:

$$\boxed{\text{Coeficiente de dilatación térmica} \rightarrow \alpha = \frac{1-2\nu}{E} \beta} \tag{6.113}$$

6.10.3 Tensiones y deformaciones térmicas

La comparación de las ecuaciones constitutivas elástica lineal (6.20) y termoelástica lineal (6.110) sugiere la siguiente descomposición:

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\lambda\, Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{\sigma}^{nt}} - \underbrace{\beta\Delta\theta\,\mathbf{1}}_{\boldsymbol{\sigma}^{t}} = \boldsymbol{\sigma}^{nt} - \boldsymbol{\sigma}^{t}$$

$$\begin{cases} \text{Tensión no - térmica} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{nt} \overset{def}{=} \lambda\, Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu\,\boldsymbol{\varepsilon} \\ \text{Tensión térmica} \quad \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{t} \overset{def}{=} \beta\Delta\theta\mathbf{1} \end{cases} \tag{6.114}$$

Donde: $\boldsymbol{\sigma}^{nt}$ representa la tensión producida en el caso de no existencia de fenómenos térmicos y $\boldsymbol{\sigma}^{t}$ es la denominada *tensión térmica* o tensión correctora debida al incremento de temperatura.

Una operación similar puede realizarse con las ecuaciones constitutivas inversas para el caso elástico lineal y termoelástico lineal de las ecuaciones (6.24) y (6.112), obteniéndose:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{-\frac{\nu}{E} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{nt}} + \underbrace{\alpha\Delta\theta\,\mathbf{1}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{t}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{nt} + \boldsymbol{\varepsilon}^{t}$$

$$\begin{cases} \text{Deformación no - térmica} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{nt} \overset{def}{=} -\frac{\nu}{E} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} \\ \text{Deformación térmica} \quad \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{t} \overset{def}{=} \alpha\Delta\theta\,\mathbf{1} \end{cases} \tag{6.115}$$

En definitiva, en termoelasticidad lineal pueden realizarse las siguientes descomposiciones de los tensores de tensión y de deformación:

Total	Componente no-térmica	Componente térmica	
$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{nt} - \boldsymbol{\sigma}^{t}}$	$\boldsymbol{\sigma}^{nt} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$ *Material isótropo:* $\boldsymbol{\sigma}^{nt} = \lambda\, Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\sigma}^{t} = \Delta\theta\boldsymbol{\beta}$ *Material isótropo:* $\boldsymbol{\sigma}^{t} = \beta\,\Delta\theta\mathbf{1}$	(6.116)
$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{nt} + \boldsymbol{\varepsilon}^{t}}$	$\boldsymbol{\varepsilon}^{nt} = \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}$ *Material isótropo:* $\boldsymbol{\varepsilon}^{nt} = -\frac{\nu}{E} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{\varepsilon}^{t} = \Delta\theta\boldsymbol{\alpha}$ *Material isótropo:* $\boldsymbol{\varepsilon}^{t} = \alpha\,\Delta\theta\mathbf{1}$	(6.117)

donde las componentes térmicas aparecen debido a la consideración de procesos térmicos. A partir de las ecuaciones (6.116) y (6.117), pueden obtenerse las siguientes expresiones:

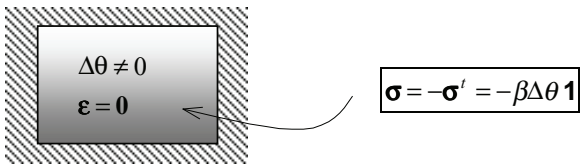
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{nt} = \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{nt} = \mathbb{C} : \left[\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{t}\right] \tag{6.118}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{nt} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}^{nt} = \mathbb{C}^{-1} : \left[\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^{t}\right] \tag{6.119}$$

Observación 6-11

Al contrario de lo que ocurre en elasticidad, en el caso termoelástico *un estado de deformación nulo* en un punto del medio *no implica un estado de tensión nulo*. En efecto, para $\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}$ de la ecuación (6.116), se obtiene:

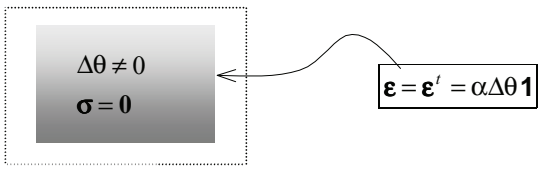
$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}\rightarrow\boldsymbol{\sigma}^{nt}=\mathbf{0}\Rightarrow\boldsymbol{\sigma}=-\boldsymbol{\sigma}^{t}=-\beta\Delta\theta\mathbf{1}\neq\mathbf{0}$$



Observación 6-12

Análogamente, en termoelasticidad *un estado de tensión nula* en un punto *no implica una deformación nula* en dicho punto puesto que de la ecuación (6.117) con $\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}$:

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}\rightarrow\boldsymbol{\varepsilon}^{nt}=\mathbf{0}\Rightarrow\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}^{t}=\alpha\Delta\theta\mathbf{1}\neq\mathbf{0}$$



6.11 Analogías térmicas

Las analogías térmicas surgen de la búsqueda de procedimientos de resolución del problema *termoelástico* lineal utilizando las estrategias y metodologías de resolución desarrolladas en el apartado 6.7 para el problema *elástico* lineal (sin consideración de efectos térmicos).

En este apartado se presentan dos analogías que, por razones de simplicidad, se restringen al problema cuasi-estático e isótropo, aunque pueden ser directamente extrapolables al problema general dinámico y anisótropo.

6.11.1 Primera analogía térmica (analogía de Duhamel-Newman)

Supongamos el medio continuo de la Figura 6-14 sobre el que actúan unas fuerzas másicas $\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$, un incremento de la temperatura $\Delta\theta(\mathbf{x},t)$, y en cuyo contornos Γ_u y Γ_σ se tienen unos desplazamientos impuestos $\mathbf{u}^*(\mathbf{x},t)$ y un vector tracción $\mathbf{t}^*$, respectivamente.

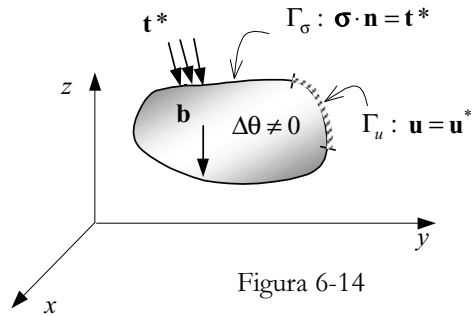


Figura 6-14

Las ecuaciones del problema termoelástico lineal (cuasiestático e isótropo) son las siguientes:

$$\begin{array}{|l|}\hline \text{Ecuaciones de gobierno} :\rightarrow \begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \rho_0\mathbf{b} = \mathbf{0} & \rightarrow \text{ec. de equilibrio} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \beta\Delta\theta\mathbf{1} \rightarrow \text{ec.constitutiva} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S\mathbf{u} & \rightarrow \text{ec. geométrica} \end{cases} \\ \hline \text{Condiciones de contorno} :\rightarrow \begin{cases} \Gamma_u : \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \\ \Gamma_\sigma : \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{t}^* \end{cases} \\ \hline \end{array} \tag{6.120}$$

NOTA

El campo de incremento térmico $\Delta\theta(\mathbf{x},t)$ se supone conocido *a priori* y por lo tanto independiente de la respuesta mecánica del problema. Esta situación se conoce como problema termomecánico *desacoplado*.

que configuran las acciones (datos) $\mathbb{A}(\mathbf{x},t)$ y respuestas (incógnitas) $\mathbb{R}(\mathbf{x},t)$ del problema:

$$\underbrace{\begin{cases} \mathbf{b}(\mathbf{x},t) \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x},t) \\ \mathbf{t}^*(\mathbf{x},t) \\ \Delta\theta(\mathbf{x},t) \end{cases}}_{\text{Acciones} = \mathbb{A}^{(1)}(\mathbf{x},t)} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x},t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) \end{cases}}_{\text{Respuestas} = \mathbb{R}^{(1)}(\mathbf{x},t)} \tag{6.121}$$

Para poder aplicar métodos de resolución típicos del problema elástico lineal, del apartado 6.7 hay que eliminar (al menos aparentemente) el término térmico de las ecuaciones del problema termoelástico (6.120). Para ello se recurre a la descomposición de las tensiones $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{nt} - \boldsymbol{\sigma}^{t}$ y se la substituye en las ecuaciones (6.120) de la siguiente forma:

a) *Ecuación de equilibrio*

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{nt} - \boldsymbol{\sigma}^{t} \Rightarrow$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{nt} - \nabla\cdot\underbrace{\boldsymbol{\sigma}^{t}}_{\beta\Delta\theta\mathbf{1}} = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{nt} - \nabla(\beta\Delta\theta) \tag{6.122}$$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \rho_0\mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \\ \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{nt} + \rho_0\underbrace{\left[\mathbf{b} - \dfrac{1}{\rho_0}\nabla(\beta\Delta\theta)\right]}_{\overset{not}{=}\hat{\mathbf{b}}} = \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{nt} + \rho_0\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{0}} \tag{6.123}$$

que constituye la ecuación de equilibrio del medio bajo unas *pseudo-fuerzas másicas* $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x},t)$ definidas por:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x},t) = \mathbf{b}(\mathbf{x},t) - \dfrac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}(\beta\,\Delta\theta) \\ \hat{b}_i(\mathbf{x},t) = b_i(\mathbf{x},t) - \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial(\beta\,\Delta\theta)}{\partial x_i} \qquad i \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{6.124}$$

b) *Ecuación constitutiva*

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}^{nt} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda\, Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\,\mathbf{1} + 2\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{6.125}$$

c) *Ecuación geométrica* (permanece inalterada)

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla}^S \mathbf{u}} \tag{6.126}$$

d) *Condición de contorno en* Γ_u

$$\boxed{\Gamma_u : \mathbf{u} = \mathbf{u}^*} \tag{6.127}$$

e) *Condición de contorno en* Γ_σ

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{nt} - \boldsymbol{\sigma}^{t} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{t}^* \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{nt}\cdot\mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}^{t}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{t}^* \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \\ \\ \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{nt}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{t}^* + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}^{t}\cdot\mathbf{n}}_{\beta\Delta\theta\,\mathbf{1}\cdot\mathbf{n}} = \underbrace{\mathbf{t}^* + (\beta\Delta\theta)\,\mathbf{n}}_{\hat{\mathbf{t}}^*} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\Gamma_\sigma :\ \boldsymbol{\sigma}^{nt}\cdot\mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}}^*} \tag{6.128}$$

donde $\hat{\mathbf{t}}^*(\mathbf{x},t)$ es un *pseudo vector de tracción* definido como:

$$\boxed{\hat{\mathbf{t}}^* = \mathbf{t}^* + (\beta\Delta\theta)\,\mathbf{n}} \tag{6.129}$$

Las ecuaciones (6.122) a (6.129) permiten reescribir el problema original (6.120) como:

$$\begin{array}{|l|} \hline \text{Ecuaciones de gobierno} :\rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{nt} + \rho_0\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \dfrac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}(\beta\Delta\theta) \\ \boldsymbol{\sigma}^{nt} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda\, Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\,\mathbf{1} + 2\mu\,\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla}^S\mathbf{u} \end{cases} \\ \hline \text{Condiciones de contorno} :\rightarrow \begin{cases} \Gamma_u : \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \\ \Gamma_\sigma :\ \boldsymbol{\sigma}^{nt}\cdot\mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}}^* \rightarrow \hat{\mathbf{t}}^* = \mathbf{t}^* + \beta\Delta\theta\,\mathbf{n} \end{cases} \\ \hline \end{array} \tag{6.130}$$

que constituye el denominado *problema análogo,* que es un problema elástico lineal que puede ser resuelto con la metodología indicada para este tipo de problemas en el apartado 6.7 y que viene caracterizado por las siguientes acciones-respuestas:

$$\underbrace{\begin{cases} \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x},t) \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x},t) \\ \hat{\mathbf{t}}^*(\mathbf{x},t) \end{cases}}_{\text{Acciones} = \mathbb{A}^{(II)}(\mathbf{x},t)} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x},t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t) \\ \boldsymbol{\sigma}^{nt}(\mathbf{x},t) \end{cases}}_{\text{Respuestas} = \mathbb{R}^{(II)}(\mathbf{x},t)} \tag{6.131}$$

Observando las acciones y respuestas del problema original (6.121) y del problema análogo (6.131), se observa que su diferencia es:

$$\mathbb{A}^{(\mathrm{I})}(\mathbf{x},t)-\mathbb{A}^{(\mathrm{II})}(\mathbf{x},t)=\begin{Bmatrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{u}^{*}\\ \mathbf{t}^{*}\\ \Delta\theta\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\hat{\mathbf{b}}\\ \mathbf{u}^{*}\\ \hat{\mathbf{t}}^{*}\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{b}-\hat{\mathbf{b}}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{t}^{*}-\hat{\mathbf{t}}^{*}\\ \Delta\theta\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{\rho_0}\nabla(\beta\Delta\theta)\\ \mathbf{0}\\ -(\beta\Delta\theta)\,\mathbf{n}\\ \Delta\theta\end{Bmatrix}\overset{def}{=}\mathbb{A}^{(\mathrm{III})}$$

$$\mathbb{R}^{(\mathrm{I})}(\mathbf{x},t)-\mathbb{R}^{(\mathrm{II})}(\mathbf{x},t)=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}\\ \boldsymbol{\varepsilon}\\ \boldsymbol{\sigma}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\mathbf{u}\\ \boldsymbol{\varepsilon}\\ \boldsymbol{\sigma}^{nt}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \underbrace{\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^{nt}}_{-\boldsymbol{\sigma}^{t}}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ -\beta\Delta\theta\mathbf{1}\end{Bmatrix}\overset{def}{=}\mathbb{R}^{(\mathrm{III})} \qquad (6.132)$$

donde se han tenido en cuenta las ecuaciones (6.129) ($\hat{\mathbf{t}}^{*}=\mathbf{t}^{*}+(\beta\Delta\theta)\,\mathbf{n}$) y (6.116) ($\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^{nt}-\boldsymbol{\sigma}^{t}=\boldsymbol{\sigma}^{nt}-\beta\Delta\theta\mathbf{1}$).

Observación 6-13

Es inmediato comprobar que, en las ecuaciones (6.132), $\mathbb{R}^{(\mathrm{III})}$ es la respuesta correspondiente al sistema de acciones $\mathbb{A}^{(\mathrm{III})}$ en el problema termo elástico (6.120).

La ecuación (6.132) sugiere que el problema original (I) puede ser visualizado como la suma (superposición) de dos problemas o estados:

ESTADO (II) (a resolver): Estado *análogo elástico* en el que no interviene la temperatura y que puede ser resuelto mediante procedimientos *elásticos*.

+

ESTADO (III) (trivial): Estado *termoelástico* trivial en el que se conocen sin necesidad de cálculos las respuestas $\mathbb{R}^{(\mathrm{III})}(\mathbf{x})$ dadas en (6.132).

Calculado el ESTADO (II) la solución del problema original termoelástico del ESTADO (I) se obtiene como:

$$\begin{array}{l}\text{Solución del}\\ \text{problema}\\ \text{termoelástico original}\end{array}\rightarrow\begin{cases}\mathbf{u}^{(\mathrm{I})}=\mathbf{u}^{(\mathrm{II})}\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{I})}=\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{II})}\\ \boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{I})}=\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{II})}-\beta\Delta\theta\,\mathbf{1}\end{cases} \qquad (6.133)$$

La síntesis del procedimiento de resolución del problema termoelástico basado en la primera analogía térmica se presenta, como una superposición de estados, en la Figura 6-15.

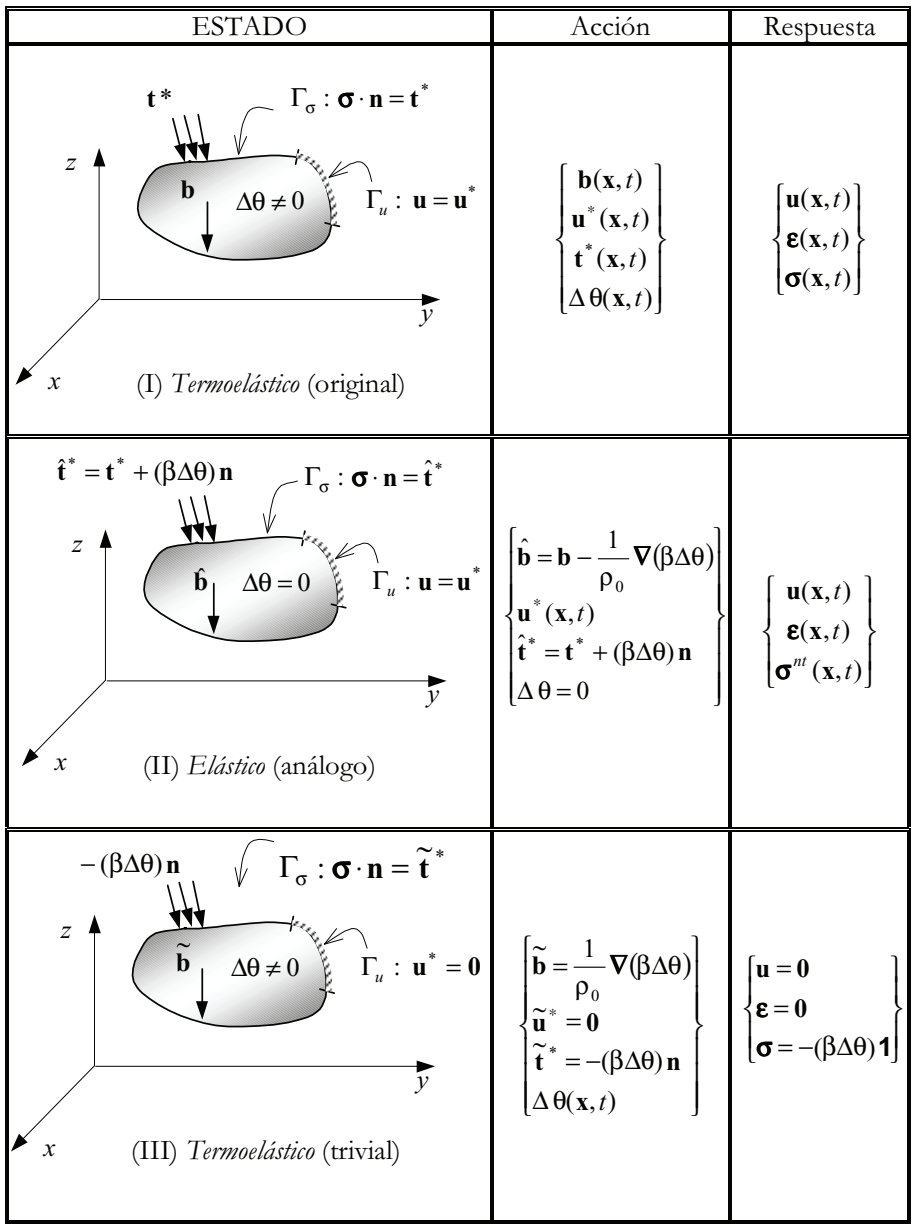

ESTADO
Acción
Respuesta
t*
$\Gamma_\sigma : \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{t}^*$
b
$\Delta\theta \neq 0$
$\Gamma_u : \mathbf{u} = \mathbf{u}^*$
z
y
x
(I) *Termoelástico* (original)
$\begin{Bmatrix} \mathbf{b}(\mathbf{x},t) \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x},t) \\ \mathbf{t}^*(\mathbf{x},t) \\ \Delta\theta(\mathbf{x},t) \end{Bmatrix}$
$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{x},t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) \end{Bmatrix}$
$\hat{\mathbf{t}}^* = \mathbf{t}^* + (\beta\Delta\theta)\mathbf{n}$
$\Gamma_\sigma : \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}}^*$
$\hat{\mathbf{b}}$
$\Delta\theta = 0$
$\Gamma_u : \mathbf{u} = \mathbf{u}^*$
(II) *Elástico* (análogo)
$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \frac{1}{\rho_0}\nabla(\beta\Delta\theta) \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x},t) \\ \hat{\mathbf{t}}^* = \mathbf{t}^* + (\beta\Delta\theta)\mathbf{n} \\ \Delta\theta = 0 \end{Bmatrix}$
$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{x},t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t) \\ \boldsymbol{\sigma}^{nt}(\mathbf{x},t) \end{Bmatrix}$
$-(\beta\Delta\theta)\mathbf{n}$
$\Gamma_\sigma : \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} = \tilde{\mathbf{t}}^*$
$\tilde{\mathbf{b}}$
$\Delta\theta \neq 0$
$\Gamma_u : \mathbf{u}^* = \mathbf{0}$
(III) *Termoelástico* (trivial)
$\begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{b}} = \frac{1}{\rho_0}\nabla(\beta\Delta\theta) \\ \tilde{\mathbf{u}}^* = \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{t}}^* = -(\beta\Delta\theta)\mathbf{n} \\ \Delta\theta(\mathbf{x},t) \end{Bmatrix}$
$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma} = -(\beta\Delta\theta)\mathbf{1} \end{Bmatrix}$

Figura 6-15 – 1ª Analogía térmica

6.11.2 Segunda analogía térmica

La segunda analogía se basa en escribir las ecuaciones del problema en función de las deformaciones térmicas $\boldsymbol{\varepsilon}^t$ de la ecuación (6.117). Consideremos las ecuaciones del problema termoelástico original escribiendo la ecuación constitutiva en forma inversa:

$$\begin{array}{|l|}\hline \text{Ecuaciones de gobierno} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho_0\mathbf{b}=\mathbf{0} & \rightarrow \text{ec. de equilibrio} \\ \boldsymbol{\varepsilon}=\mathbb{C}^{-1}:\boldsymbol{\sigma}+(\alpha\Delta\theta)\,\mathbf{1} & \rightarrow \text{ec.constitutiva inversa} \\ \boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\nabla}^S\mathbf{u} & \rightarrow \text{ec. geométrica} \end{cases} \\ \hline \text{Condiciones de contorno} :\rightarrow \begin{cases} \Gamma_u : \mathbf{u}=\mathbf{u}^* \\ \Gamma_\sigma : \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{t}^* \end{cases} \\ \hline \end{array} \qquad (6.134)$$

que configuran las acciones (datos) $\mathbb{A}(\mathbf{x},t)$ y respuestas (incógnitas) $\mathbb{R}(\mathbf{x},t)$ del problema:

$$\underbrace{\begin{cases} \mathbf{b}(\mathbf{x},t) \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x},t) \\ \mathbf{t}^*(\mathbf{x},t) \\ \Delta\theta(\mathbf{x},t) \end{cases}}_{\text{Acciones}=\mathbb{A}^{(1)}(\mathbf{x},t)} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x},t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) \end{cases}}_{\text{Respuestas}=\mathbb{R}^{(1)}(\mathbf{x},t)} \qquad (6.135)$$

Hipótesis:

Supongamos que el coeficiente de dilatación térmica $\alpha(\mathbf{x})$ y el incremento térmico $\Delta\theta(\mathbf{x},t)$ son tales que el campo de deformaciones térmicas

$$\boldsymbol{\varepsilon}^t(\mathbf{x},t) = \alpha(\mathbf{x})\,\Delta\theta(\mathbf{x},t)\,\mathbf{1}$$

es integrable (cumple las ecuaciones de compatibilidad).

En consecuencia, existe un campo de *desplazamientos térmicos* $\mathbf{u}^t(\mathbf{x},t)$ que cumple:

$$\mathbf{u}^t(\mathbf{x},t) \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^t(\mathbf{x},t)=(\alpha\Delta\theta)\mathbf{1}=\boldsymbol{\nabla}^S\mathbf{u}^t=\dfrac{1}{2}\left(\mathbf{u}^t\otimes\boldsymbol{\nabla}+\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}^t\right) \\ \varepsilon^t_{ij}=(\alpha\Delta\theta)\,\delta_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i^t}{\partial x_j}+\dfrac{\partial u_j^t}{\partial x_i}\right) \quad i,j\in\{1,2,3\} \end{cases} \qquad (6.136)$$

Observación 6-14

La solución $\mathbf{u}^t(\mathbf{x},t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales (6.136) existe si y sólo si el campo de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}^t(\mathbf{x},t)$ cumple las ecuaciones de compatibilidad (ver capítulo 3). Además, dicha solución esta determinada *salvo un movimiento de sólido rígido* caracterizado por un tensor de rotación $\boldsymbol{\Omega}^*$ y un vector de desplazamiento $\mathbf{c}^*$ (ambos constantes). Es decir, hay una familia de soluciones admisibles de la forma:

$$\mathbf{u}^t(\mathbf{x},t)=\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)+\underbrace{\underbrace{\boldsymbol{\Omega}^*\cdot\mathbf{x}}_{\text{rotación}}+\underbrace{\mathbf{c}^*}_{\text{traslación}}}_{\substack{\text{movimiento}\\ \text{de sólido rígido}}}$$

Dicho movimiento de sólido rígido puede ser elegido *arbitrariamente* (de la forma más conveniente para el proceso de resolución).

Una vez definidos los desplazamientos térmicos puede realizarse una descomposición de los desplazamientos totales en su parte térmica y no-térmica como sigue:

$$\mathbf{u}^{nt}(\mathbf{x},t) \overset{def}{=} \mathbf{u}(\mathbf{x},t) - \mathbf{u}^{t}(\mathbf{x},t) \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{u} = \mathbf{u}^{nt} + \mathbf{u}^{t}} \tag{6.137}$$

Para eliminar el término térmico de las ecuaciones del problema termoelástico (6.134) se recurre a la descomposición de los desplazamientos y de las deformaciones en su parte térmica y no-térmica ($\mathbf{u} = \mathbf{u}^{nt} + \mathbf{u}^{t}$ y $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{nt} + \boldsymbol{\varepsilon}^{t}$) y se substituye en las ecuaciones (6.134) que se transforman como sigue:

a) *Ecuación de equilibrio* (permanece inalterada)

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0}} \tag{6.138}$$

b) *Ecuación constitutiva*

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}^{nt} = \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} = -\frac{\nu}{E} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma}} \tag{6.139}$$

c) *Ecuación geométrica*

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla}^{S}\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}^{S}(\mathbf{u}^{nt} + \mathbf{u}^{t}) = \boldsymbol{\nabla}^{S}\mathbf{u}^{nt} + \underbrace{\boldsymbol{\nabla}^{S}\mathbf{u}^{t}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{t}} = \boldsymbol{\nabla}^{S}\mathbf{u}^{nt} + \boldsymbol{\varepsilon}^{t} \\ &\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{nt} + \boldsymbol{\varepsilon}^{t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\varepsilon}^{nt} = \boldsymbol{\nabla}^{S}\mathbf{u}^{nt}} \tag{6.140}$$

d) *Condición de contorno en* Γ_u

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{u} = \mathbf{u}^{*} \\ &\mathbf{u} = \mathbf{u}^{nt} + \mathbf{u}^{t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Gamma_u : \mathbf{u}^{nt} = \mathbf{u}^{*} - \mathbf{u}^{t} \tag{6.141}$$

e) *Condición de contorno en* Γ_σ (permanece inalterada)

$$\boxed{\Gamma_\sigma : \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^{*}} \tag{6.142}$$

Las ecuaciones (6.138) a (6.142) permiten rescribir el problema original (6.134) como:

$$\begin{array}{|l|}\hline \text{Ecuaciones de gobierno} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} & \rightarrow \text{ec. de equilibrio} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{nt} = \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} & \rightarrow \text{ec. constitutiva inversa} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{nt} = \boldsymbol{\nabla}^{S}\mathbf{u}^{nt} & \rightarrow \text{ec. geométrica} \end{cases} \\ \hline \text{Condiciones de contorno} : \rightarrow \begin{cases} \Gamma_u : \mathbf{u} = \mathbf{u}^{*} - \mathbf{u}^{t} \\ \Gamma_\sigma : \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^{*} \end{cases} \\ \hline \end{array} \tag{6.143}$$

que constituye el *problema análogo* elástico lineal caracterizado por las siguientes acciones-respuestas:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix}\mathbf{b}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{u}^{*}(\mathbf{x},t)-\mathbf{u}^{t}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{t}^{*}(\mathbf{x},t)\end{Bmatrix}}_{\text{Acciones}=\mathbb{A}^{(\text{II})}(\mathbf{x},t)} \Rightarrow \underbrace{\begin{Bmatrix}\mathbf{u}^{nt}(\mathbf{x},t)\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{nt}(\mathbf{x},t)\\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)\end{Bmatrix}}_{\text{Respuestas}=\mathbb{R}^{(\text{II})}(\mathbf{x},t)} \tag{6.144}$$

Observando las acciones y respuestas del problema original (6.135) y del problema análogo (6.144), se observa que su diferencia es:

$$\mathbb{A}^{(\text{I})}(\mathbf{x},t)-\mathbb{A}^{(\text{II})}(\mathbf{x},t)=\begin{Bmatrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{u}^{*}\\ \mathbf{t}^{*}\\ \Delta\theta\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{u}^{*}-\mathbf{u}^{t}\\ \mathbf{t}^{*}\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{u}^{t}\\ \mathbf{0}\\ \Delta\theta\end{Bmatrix}\overset{def}{=}\mathbb{A}^{(\text{III})}$$

$$\mathbb{R}^{(\text{I})}(\mathbf{x},t)-\mathbb{R}^{(\text{II})}(\mathbf{x},t)=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}\\ \boldsymbol{\varepsilon}\\ \boldsymbol{\sigma}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\mathbf{u}^{nt}\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{nt}\\ \boldsymbol{\sigma}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}^{t}\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{t}\\ \mathbf{0}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}^{t}\\ \alpha\Delta\theta\,\mathbf{1}\\ \mathbf{0}\end{Bmatrix}\overset{def}{=}\mathbb{R}^{(\text{III})} \tag{6.145}$$

donde se han tenido en cuenta las ecuaciones (6.117) ($\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}^{nt}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{t}}$) y (6.137) ($\mathbf{u}=\mathbf{u}^{nt}+\mathbf{u}^{t}$).

Observación 6-15

Es inmediato comprobar que, en las ecuaciones (6.145), $\mathbb{R}^{(\text{III})}$ es la respuesta correspondiente al sistema de acciones $\mathbb{A}^{(\text{III})}$ en el problema termo elástico (6.134).

En consecuencia, el problema original (I) puede ser contemplado como la suma (superposición) de dos problemas o estados:

ESTADO (II) (a resolver): Estado *análogo elástico* en el que no interviene la temperatura y que puede ser resuelto mediante procedimientos *elásticos*.

+

ESTADO (III) (trivial): Estado *termoelástico* trivial en el que se conocen sin necesidad de cálculos las respuestas $\mathbb{R}^{(\text{III})}(\mathbf{x})$ dadas en (6.145).

Calculado el ESTADO (II) la solución del problema original termoelástico del ESTADO (I) se obtiene como:

$$\text{Solución del problema termoelástico original} \rightarrow \begin{cases}\mathbf{u}^{(\text{I})}=\mathbf{u}^{(\text{II})}+\mathbf{u}^{t}\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(\text{I})}=\boldsymbol{\varepsilon}^{(\text{II})}+\alpha\Delta\theta\,\mathbf{1}\\ \boldsymbol{\sigma}^{(\text{I})}=\boldsymbol{\sigma}^{(\text{II})}\end{cases} \tag{6.146}$$

donde $\mathbf{u}^{t}$ se conoce del proceso de integración del campo de deformaciones térmicas en la ecuación (6.136). La síntesis del procedimiento de resolución del problema termoelástico basado en la segunda analogía térmica se presenta, como una superposición de estados, en la Figura 6-16.

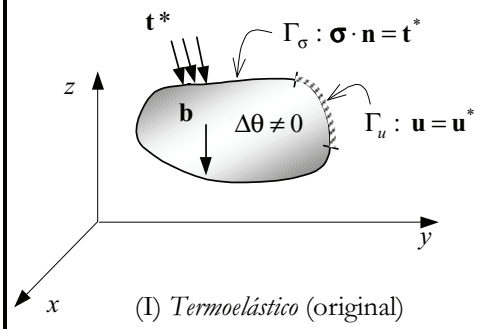
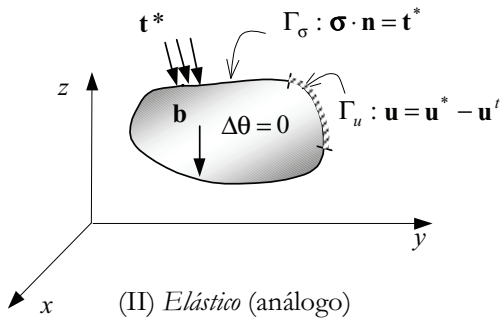
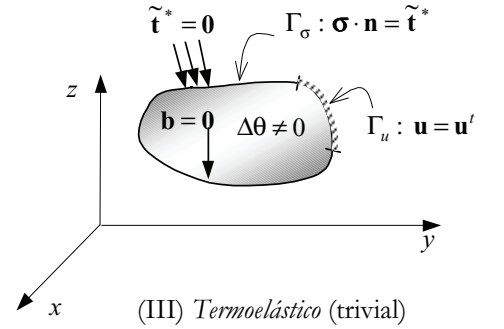
ESTADO	Acción	Respuesta
 (I) *Termoelástico* (original)	$\begin{Bmatrix}\mathbf{b}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{t}^*(\mathbf{x},t)\\ \Delta\theta(\mathbf{x},t)\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)\\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)\end{Bmatrix}$
 (II) *Elástico* (análogo)	$\begin{Bmatrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{u}^*-\mathbf{u}^t\\ \mathbf{t}^*\\ \Delta\theta=0\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}\mathbf{u}^{nt}(\mathbf{x},t)\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{nt}(\mathbf{x},t)\\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)\end{Bmatrix}$
 (III) *Termoelástico* (trivial)	$\begin{Bmatrix}\mathbf{b}=\mathbf{0}\\ \tilde{\mathbf{u}}^*=\mathbf{u}^t\\ \tilde{\mathbf{t}}^*=\mathbf{0}\\ \Delta\theta(\mathbf{x},t)\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}\mathbf{u}=\mathbf{u}^t(\mathbf{x},t)\\ \boldsymbol{\varepsilon}=(\alpha\Delta\theta)\mathbf{1}\\ \boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}\end{Bmatrix}$

Figura 6-16 – 2ª Analogía térmica

Ejemplo 6-5 – *Resolver mediante la 2ª analogía térmica el problema uniaxial de una viga empotrada en ambos extremos sobre la cual actúa un incremento de temperatura constante* $\Delta\theta$ (*Figura 6-17*).

Resolución:

El procedimiento clásico de resolución en Resistencia de Materiales consiste en la superposición (suma) de las siguientes situaciones: 1) Se considera la estructura inicialmente hiperestática, 2) se *libera* el extremo derecho para permitir la expansión térmica, que se produce (al ser la estructura isostática)

con tensiones nulas y 3) se *recupera* el desplazamiento del extremo derecho de la viga hasta llevarlo nuevamente a cero.

Este procedimiento coincide exactamente con la aplicación de la 2ª analogía térmica en la que el campo de desplazamientos térmicos $\mathbf{u}^t$ viene definido por la expansión térmica de la pieza con su extremo derecho liberado (Estado III). Dicha expansión produce un desplazamiento en dicho extremo de valor $u|_{x=\ell} = \alpha\Delta\theta\ell$ y al recuperar el desplazamiento en dicho extremo se está aplicando implícitamente la condición de contorno

$$\Gamma_u : \ \mathbf{u} = \underbrace{\mathbf{u}^*}_{\mathbf{0}} - \mathbf{u}^t = -\mathbf{u}^t$$

que corresponde exactamente con el Estado II de la Figura 6-16.

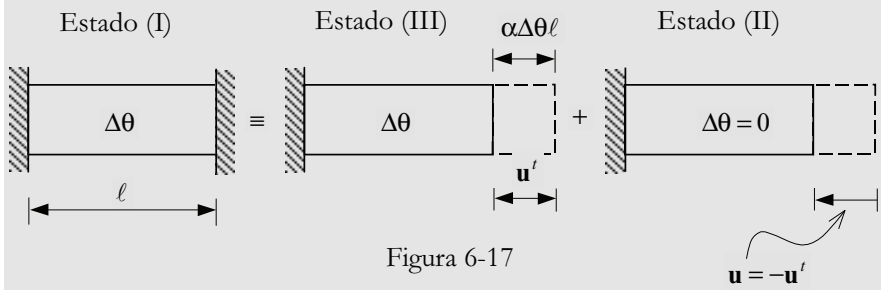


Figura 6-17

Observación 6-16

La aplicación de la 2ª analogía térmica reside fundamentalmente en la integración del campo de deformaciones térmicas $\boldsymbol{\varepsilon}^t(\mathbf{x},t)$ para obtener el campo de desplazamientos térmicos $\mathbf{u}^t(\mathbf{x},t)$ (ver Observación 6-14). De no ser integrables las deformaciones térmicas, la analogía no es aplicable. Comparando sus ventajas e inconvenientes frente a la 1ª analogía, es asimismo recomendable que la integración de las deformaciones térmicas sea, además de posible, *simple* de realizar.

Observación 6-17

El caso particular de:

- *material homogéneo* ($\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = ctte = \boldsymbol{\alpha}$)
- *incremento térmico lineal* ($\Delta\theta = ax + by + cz + d$)

reviste particular interés. En este caso el producto $\Delta\theta\,\boldsymbol{\alpha}$ es un polinomio lineal y las deformaciones térmicas $\boldsymbol{\varepsilon}^t = \Delta\theta\,\boldsymbol{\alpha}$ cumplen automáticamente las ecuaciones de compatibilidad (6.68) (que son ecuaciones que solo contienen derivadas de segundo orden) por lo que puede garantizarse que *el campo de deformaciones térmicas es integrable*.

Observación 6-18

Para el caso con:

- *material homogéneo* ($\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = cte. = \boldsymbol{\alpha}$)
- *incremento térmico contante* ($\Delta\theta = cte.$)

la integración del campo de deformación térmica $\boldsymbol{\varepsilon}^t = \Delta\theta\,\boldsymbol{\alpha} = cte.$ resulta trivial resultando:

$$\mathbf{u}^t(\mathbf{x},t) = \alpha\Delta\theta\,\mathbf{x} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega}^* \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}^*}_{\substack{\text{movimiento} \\ \text{de sólido rígido}}}$$

donde el movimiento de sólido rígido puede ser elegido arbitrariamente (ver Observación 6-14). Haciendo nulo dicho movimiento la solución para el desplazamiento térmico resulta ser:

$$\mathbf{u}^t(\mathbf{x},t) = \alpha\Delta\theta\,\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{u}^t = \mathbf{x} + \alpha\Delta\theta\,\mathbf{x} = (1 + \alpha\Delta\theta)\mathbf{x}$$

con lo que el ESTADO III de la 2ª analogía (ver Figura 6-16) *resulta ser una homotecia, respecto al origen de coordenadas, de razón* $(1 + \alpha\Delta\theta)$. Dicha homotecia es conocida como *expansión térmica libre* (ver Figura 6-18).

NOTA

El origen de coordenadas, y por lo tanto el origen de la homotecia, puede ser elegido arbitrariamente de la forma mas conveniente para simplificar el análisis.

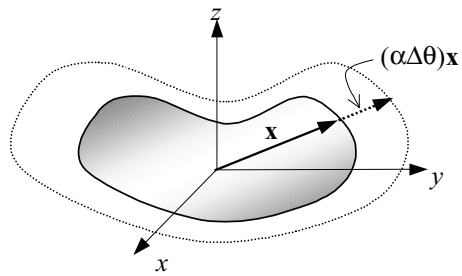


Figura 6-18

El valor del desplazamiento térmico (asociado a la expansión térmica libre) en el contorno Γ_u puede ser en este caso determinado de forma trivial sin necesidad de integrar *formalmente* las deformaciones térmicas.

6.12 Principio de superposición en termo-elasticidad lineal

Consideremos el problema termo elástico lineal de la Figura 6-19 y las correspondientes ecuaciones de gobierno del problema:

Ecuación de Cauchy: Ecuación constitutiva: Ecuación geométrica:	$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho_0\mathbf{b}=\rho_0\dfrac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}$ $\boldsymbol{\sigma}=\underbrace{\lambda Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1}+2\mu\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbb{C}:\boldsymbol{\varepsilon}}-\beta\Delta\theta\mathbf{1}$ $\boldsymbol{\varepsilon}=\nabla^S\mathbf{u}=\dfrac{1}{2}(\mathbf{u}\otimes\nabla+\nabla\otimes\mathbf{u})$	(6.147)
Condiciones de contorno en el espacio:	$\Gamma_u:\ \mathbf{u}=\mathbf{u}^*$ $\Gamma_\sigma:\ \mathbf{t}^*=\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}$	(6.148)
Condiciones iniciales:	$\mathbf{u}(\mathbf{x},0)=\mathbf{0}$ $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},0)=\mathbf{v}_0$	(6.149)

que definen el conjunto genérico acción-respuesta:

$$\mathbb{A}(\mathbf{x},t)\equiv\begin{Bmatrix}\mathbf{b}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{t}^*(\mathbf{x},t)\\ \Delta\theta(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{v}_0(\mathbf{x})\end{Bmatrix}\ \rightarrow\ \mathbb{R}(\mathbf{x},t)\equiv\begin{Bmatrix}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)\\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)\end{Bmatrix} \tag{6.150}$$

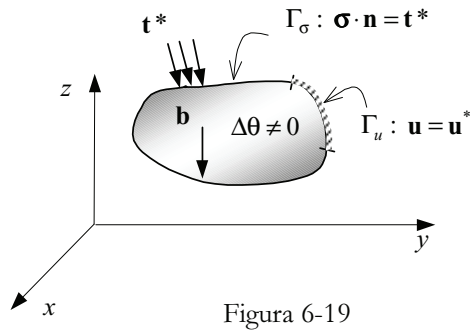


Figura 6-19

Observación 6-19

Los distintos operadores (escalares, vectoriales, tensoriales y diferenciales) que intervienen en las ecuaciones de gobierno del problema (6.147) a (6.149) son lineales, es decir, dados dos escalares a y b cualesquiera:

$$\nabla\cdot(\bullet)\rightarrow\text{ lineal}\Rightarrow\nabla\cdot(a\mathbf{x}+b\mathbf{y})=a\nabla\cdot\mathbf{x}+b\nabla\cdot\mathbf{y}$$

$$\mathbb{C}:(\bullet)\rightarrow\text{ lineal}\Rightarrow\mathbb{C}:[a\mathbf{x}+b\mathbf{y}]=a\,\mathbb{C}:\mathbf{x}+b\,\mathbb{C}:\mathbf{y}$$

$$\nabla^S(\bullet)\rightarrow\text{ lineal}\Rightarrow\nabla^S(a\mathbf{x}+b\mathbf{y})=a\nabla^S\mathbf{x}+b\nabla^S\mathbf{y}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\bullet)\rightarrow\text{ lineal}\Rightarrow\frac{\partial^2(a\mathbf{x}+b\mathbf{y})}{\partial t^2}=a\frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial t^2}+b\frac{\partial^2\mathbf{y}}{\partial t^2}$$

Consideremos ahora dos posibles sistemas de acciones $\mathbb{A}^{(1)}$ y $\mathbb{A}^{(2)}$:

$$\mathbb{A}^{(1)}(\mathbf{x},t)\equiv\begin{Bmatrix}\mathbf{b}^{(1)}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{u}^{*(1)}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{t}^{*(1)}(\mathbf{x},t)\\ \Delta\theta^{(1)}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{v}_0^{(1)}(\mathbf{x})\end{Bmatrix};\qquad \mathbb{A}^{(2)}(\mathbf{x},t)\equiv\begin{Bmatrix}\mathbf{b}^{(2)}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{u}^{*(2)}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{t}^{*(2)}(\mathbf{x},t)\\ \Delta\theta^{(2)}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{v}_0^{(2)}(\mathbf{x})\end{Bmatrix} \tag{6.151}$$

y las respectivas respuestas:

$$\mathbb{R}^{(1)}(\mathbf{x},t)\equiv\begin{Bmatrix}\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x},t)\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{x},t)\\ \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x},t)\end{Bmatrix};\quad \mathbb{R}^{(2)}(\mathbf{x},t)\equiv\begin{Bmatrix}\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x},t)\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}(\mathbf{x},t)\\ \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x},t)\end{Bmatrix} \tag{6.152}$$

Teorema *(Principio de superposición):*

La solución (respuesta) al sistema de acciones $\mathbb{A}^{(3)}=\lambda^{(1)}\mathbb{A}^{(1)}+\lambda^{(2)}\mathbb{A}^{(2)}$ (siendo $\lambda^{(1)}$ y $\lambda^{(2)}$ dos escalares cualesquiera) es $\mathbb{R}^{(3)}=\lambda^{(1)}\mathbb{R}^{(1)}+\lambda^{(2)}\mathbb{R}^{(2)}$.

En otras palabras: *la solución del problema termo-elástico lineal ante una combinación lineal de distintos sistemas de acciones es la misma combinación lineal de las soluciones ante cada uno de ellos.*

Demostración:

Sustituyendo los datos $\mathbb{A}^{(3)}=\lambda^{(1)}\mathbb{A}^{(1)}+\lambda^{(2)}\mathbb{A}^{(2)}$ y la solución $\mathbb{R}^{(3)}=\lambda^{(1)}\mathbb{R}^{(1)}+\lambda^{(2)}\mathbb{R}^{(2)}$ en las ecuaciones del problema, y teniendo en cuenta la linealidad de los distintos operadores (ver Observación 6-19) se tiene:

a) *Ecuación de Cauchy*

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(3)}+\rho_0\,\mathbf{b}^{(3)}&=\lambda^{(1)}\underbrace{(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(1)}+\rho\mathbf{b}^{(1)})}_{\rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}^{(1)}}{\partial t^2}}+\lambda^{(2)}\underbrace{(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(2)}+\rho\mathbf{b}^{(2)})}_{\rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}^{(2)}}{\partial t^2}}=\\ &=\rho_0\,\frac{\partial^2(\lambda^{(1)}\mathbf{u}^{(1)}+\lambda^{(2)}\mathbf{u}^{(2)})}{\partial t^2}=\rho_0\,\frac{\partial^2\mathbf{u}^{(3)}}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \tag{6.153}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(3)}+\rho_0\,\mathbf{b}^{(3)}=\rho_0\,\frac{\partial^2\mathbf{u}^{(3)}}{\partial t^2}}$$

b) *Ecuación constitutiva*:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{(3)} - (\mathbb{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} - \beta\Delta\theta^{(3)}\mathbf{1}) = \lambda^{(1)}\Big[\overbrace{\boldsymbol{\sigma}^{(1)} - (\mathbb{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} - \beta\Delta\theta^{(1)}\mathbf{1})}^{=\mathbf{0}}\Big] + \\ \lambda^{(2)}\Big[\underbrace{\boldsymbol{\sigma}^{(2)} - (\mathbb{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} - \beta\Delta\theta^{(2)}\mathbf{1})}_{=\mathbf{0}}\Big] = \mathbf{0}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}^{(3)} = \mathbb{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} - \beta\Delta\theta^{(3)}\mathbf{1}} \tag{6.154}$$

c) *Ecuación geométrica*:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} - \nabla^S\mathbf{u}^{(3)} = \lambda^{(1)}\underbrace{\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} - \nabla^S\mathbf{u}^{(1)}\right)}_{=\mathbf{0}} + \lambda^{(2)}\underbrace{\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} - \nabla^S\mathbf{u}^{(2)}\right)}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} = \nabla^S\mathbf{u}^{(3)}} \tag{6.155}$$

d) *Condición de contorno en* Γ_u

$$\mathbf{u}^{(3)} - \mathbf{u}^{*(3)} = \lambda^{(1)}\underbrace{\left(\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{*(1)}\right)}_{=\mathbf{0}} + \lambda^{(2)}\underbrace{\left(\mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{u}^{*(2)}\right)}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{0}$$

$$\boxed{\Gamma_u:\ \mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{u}^{*(3)}} \tag{6.156}$$

e) *Condición de contorno en* Γ_σ

$$\boldsymbol{\sigma}^{(3)}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{t}^{*(3)} = \lambda^{(1)}\underbrace{\left(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{t}^{*(1)}\right)}_{=\mathbf{0}} + \lambda^{(2)}\underbrace{\left(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{t}^{*(2)}\right)}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{0}$$

$$\boxed{\Gamma_\sigma:\ \boldsymbol{\sigma}^{(3)}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{t}^{*(3)}} \tag{6.157}$$

f) *Condiciones iniciales*

$$\dot{\mathbf{u}}^{(3)}(\mathbf{x},0) - \mathbf{v}_0^{(3)} = \lambda^{(1)}\underbrace{\left(\dot{\mathbf{u}}^{(1)}(\mathbf{x},0) - \mathbf{v}_0^{(1)}\right)}_{=\mathbf{0}} + \lambda^{(2)}\underbrace{\left(\dot{\mathbf{u}}^{(2)}(\mathbf{x},0) - \mathbf{v}_0^{(2)}\right)}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{0}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{u}}^{(3)}(\mathbf{x},0) = \mathbf{v}_0^{(3)}} \tag{6.158}$$

En consecuencia $\mathbb{R}^{(3)} = \lambda^{(1)}\mathbb{R}^{(1)} + \lambda^{(2)}\,\mathbb{R}^{(2)} \equiv \{\mathbf{u}^{(3)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)}, \boldsymbol{\sigma}^{(3)}\}^T$ es solución del problema elástico bajo las accciones: $\mathbb{A}^{(3)} = \lambda^{(1)}\mathbb{A}^{(1)} + \lambda^{(2)}\,\mathbb{A}^{(2)}$ c.q.d.

6.13 Ley de Hooke en función de los "vectores" de tensión y de deformación

La simetría de los tensores de tensión, $\boldsymbol{\sigma}$, y de deformación, $\boldsymbol{\varepsilon}$, hace que, de sus nueve componentes en un determinado sistema cartesiano, sólo seis sean distintas. En consecuencia, y por razones de "economía" en la escritura, es tradicional en ingeniería trabajar sólo con las seis componentes distintas introduciendo los denominados "vectores" de tensión y de deformación. Estos se construyen en $\mathbb{R}^6$ ordenando de forma sistemática los elementos del *triángulo superior* de la matriz de componentes del tensor correspondiente:

NOTACION

Se utilizará la notación $\{\mathbf{x}\}$ para denotar el vector en $\mathbb{R}^6$ construido a partir del tensor simétrico $\mathbf{x}$.

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \rightarrow \{\boldsymbol{\sigma}\} \overset{def}{=} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \tag{6.159}$$

Lo mismo ocurre con las deformaciones con la particularidad de que, para construir el vector de deformación $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$, se utilizan las deformaciones tangenciales de cizalladura $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}, \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz}, \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$ (ver capítulo 2, apartado 2.11.4):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \overset{not.}{=} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \rightarrow \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \overset{def}{=} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \tag{6.160}$$

Observación 6-20

Una propiedad interesante de dicha construcción es que el producto doblemente contraído de los tensores de tensión y de deformación ($\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$) se transforma en el producto *escalar* (en $\mathbb{R}^6$) de los vectores de tensión y de deformación: ($\{\boldsymbol{\sigma}\}.\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$):

$$\underbrace{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}}_{\substack{\text{Tensores de} \\ \text{segundo orden}}} = \underbrace{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{Vectores}} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \sigma_i \varepsilon_i$$

como puede comprobarse realizando dichas operaciones a partir de las definiciones en (6.159) y (6.160).

La ecuación constitutiva inversa (6.112):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} + \alpha\Delta\theta\mathbf{1} \tag{6.161}$$

puede reescribirse ahora en función de los vectores de tensión y de deformación como:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \hat{\mathbb{C}}^{-1} : \{\boldsymbol{\sigma}\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^t \tag{6.162}$$

donde $\hat{\mathbb{C}}^{-1}$ es una matriz inversa de constantes elásticas:

$$\hat{\mathbb{C}}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{array}\right] \tag{6.163}$$

y $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^t$ un vector de deformaciones térmicas que se escribe mediante la adecuada *traducción* del tensor de deformaciones térmicas $\alpha\Delta\theta\mathbf{1}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^t \equiv \begin{bmatrix} \alpha\Delta\theta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\Delta\theta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\Delta\theta \end{bmatrix} \rightarrow \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^t = \begin{bmatrix} \alpha\Delta\theta \\ \alpha\Delta\theta \\ \alpha\Delta\theta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.164}$$

Finalmente, la inversión de la ecuación (6.162) proporciona las *ley de Hooke* en función de los vectores de tensión y de deformación:

Ley de Hooke en función de los vectores de tensión y deformación	$\rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbb{C}}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^t\right)$

(6.165)

siendo $\hat{\mathbb{C}}$ la matriz de constantes elásticas:

$$\hat{\mathbb{C}} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \tag{6.166}$$

7 Elasticidad lineal plana

7.1 Introducción

Como se vio en el capítulo 6, desde el punto de vista matemático, el problema elástico consiste en un sistema de EDP's que debe ser resuelto en las tres dimensiones del espacio y en la dimensión asociada al tiempo ($\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$). Sin embargo, existen ciertas situaciones en las que dicho problema puede ser simplificado, reduciéndose el problema a dos dimensiones espaciales $\mathbb{R}^2$, además de, eventualmente, la dimensión temporal ($\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$). La posibilidad de esta simplificación reside en que, en ciertos casos, la propia geometría y condiciones de contorno del problema permite identificar una *dirección irrelevante* (asociada a una dimensión del problema) de tal forman que pueden plantearse *a priori* soluciones del problema elástico *independientes de dicha dimensión*.

Si se considera un sistema local de coordenadas $\{x, y, z\}$ en el que dicha dirección irrelevante (supuesta constante) coincide con la dirección z, el análisis queda reducido al plano $\{x, y\}$, y de ahí el nombre *elasticidad plana* con el que suele denominarse a estos problemas. A su vez, éstos suelen dividirse en dos grandes grupos asociados a dos familias de hipótesis simplificativas:

- Problemas de *tensión plana*.
- Problemas de *deformación plana*.

Por simplicidad consideraremos aquí el caso *isotérmico,* aunque no hay ninguna limitación intrínseca para la generalización de los resultados que van a obtenerse al caso termoelástico.

7.2 Estado de tensión plana

El estado de tensión plana queda caracterizado por las siguientes hipótesis simplificativas:

1) *El estado tensional es de la forma*:

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{xyz} \equiv \left[\begin{array}{cc|c} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{7.1}$$

2) *Las tensiones no nulas (es decir, las asociadas al plano $x-y$) no dependen de la variable z :*

$$\boxed{\sigma_x = \sigma_x(x,y,t) \quad ; \quad \sigma_y = \sigma_y(x,y,t) \quad ; \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x,y,t)} \tag{7.2}$$

Para analizar bajo que condiciones las anteriores hipótesis resultan razonables, consideremos un medio elástico plano cuyas dimensiones y forma asociadas al plano $x-y$ (que denominaremos *plano de análisis*) son arbitrarias y tal que la tercera dimensión (que denominaremos al *espesor* de la pieza) queda asociada al eje z (ver Figura 7-1). Supondremos que se dan las siguientes circunstancias sobre el medio elástico en cuestión:

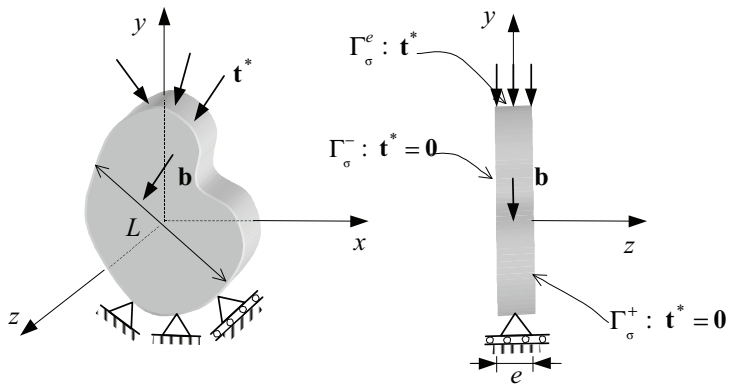


Figura 7-1– Ejemplo de estado de tensión plana

a) El espesor e es mucho menor que la dimensión típica asociada al plano de análisis $x-y$:

$$e << L \tag{7.3}$$

b) Las acciones (fuerzas másicas $\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$, desplazamientos impuestos $\mathbf{u}^*(\mathbf{x},t)$ y vector tracción $\mathbf{t}^*(\mathbf{x},t)$) están contenidas en el plano de análisis $x-y$ (su componente z es nula) y, además, no dependen de la tercera dimensión:

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x(x,y,t) \\ b_y(x,y,t) \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \Gamma_u : \mathbf{u}^* = \begin{Bmatrix} u_x^*(x,y,t) \\ u_y^*(x,y,t) \\ - \end{Bmatrix}$$
$$\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma^+ \cup \Gamma_\sigma^- \cup \Gamma_\sigma^e : \mathbf{t}^* = \begin{Bmatrix} t_x^*(x,y,t) \\ t_y^*(x,y,t) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7.4}$$

c) El vector tracción $\mathbf{t}^*(\mathbf{x},t)$ *solo es distinto de cero sobre el contorno del espesor de la pieza* (contorno Γ_σ^e), mientras que sobre las superficies laterales Γ_σ^+ y Γ_σ^- es nulo (ver Figura 7-1).

$$\Gamma_\sigma^+ \cup \Gamma_\sigma^- : \mathbf{t}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7.5}$$

Observación 7-1

La pieza con geometría y acciones definidas por las ecuaciones (7.3) y (7.4) y el estado de tensión plana, indicado por las ecuaciones (7.1) y (7.2) y esquematizado en la figura Figura 7-2, resultan compatibles. En efecto, aplicando las condiciones de contorno Γ_σ sobre la pieza se obtiene:

- *Superficies laterales*: Γ_σ^+ y Γ_σ^-:

$$\mathbf{n}=\begin{Bmatrix}0\\0\\\pm 1\end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & 0\\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\pm 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

- *Canto* Γ_σ^e:

$$\mathbf{n}=\begin{Bmatrix}n_x\\n_y\\0\end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma}(x,y,t)\cdot\mathbf{n}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & 0\\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_x\\n_y\\0\end{bmatrix}=\begin{Bmatrix}t_x(x,y,t)\\t_x(x,y,t)\\0\end{Bmatrix}$$

compatibles con las suposiciones (7.4) y (7.5).

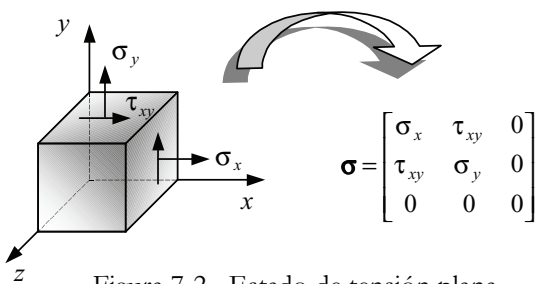


Figura 7-2– Estado de tensión plana

NOTA

El hecho de que todas las *tensiones* no nulas estén contenidas en el plano $x-y$ da lugar al nombre *de tensión plana.*

7.2.1 Campo de deformaciones. Ecuación constitutiva

Consideremos ahora la ecuación constitutiva elástica lineal:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=-\frac{\nu}{E}Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}+\frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma}=-\frac{\nu}{E}Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}+\frac{1}{2G}\boldsymbol{\sigma} \tag{7.6}$$

que aplicada al estado tensional (7.1) y en notación ingenieril proporciona las deformaciones como:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right]=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu\sigma_y\right] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu\left(\sigma_x+\sigma_z\right)\right]=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu\sigma_x\right] & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G}\tau_{xz}=0\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z-\nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right]=-\frac{\nu}{E}\left[\sigma_x+\sigma_y\right] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz}=0
\end{aligned} \tag{7.7}$$

donde se han tenido en cuenta las condiciones $\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$. En vista de las ecuaciones (7.2) y (7.7) puede concluirse que tampoco las deformaciones dependen

RECORDATORIO

Las deformaciones tangenciales ingenieriles se definen como:

$\gamma_{xy}=2\varepsilon_{xy}$

$\gamma_{xz}=2\varepsilon_{xz}$

$\gamma_{yz}=2\varepsilon_{yz}$

de la coordenada z ($\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(x,y,t)$). Asimismo, en la ecuación (7.7) puede resolverse la deformación ε_z como:

$$\boxed{\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} \tag{7.8}$$

En definitiva el tensor de deformaciones para el caso de tensión plana resulta:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x,y,t) \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \tag{7.9}$$

y la sustitución de la ecuación (7.8) en la ecuación (7.7) conduce, tras algunas operaciones algebraicas, a:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu^2)}\left[\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right] \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1-\nu^2)}\left[\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\,\gamma_{xy} \end{aligned} \tag{7.10}$$

que puede reescribirse como:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\sigma}\}} = \underbrace{\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbb{C}^{T.P.}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\varepsilon}\}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\{\boldsymbol{\sigma}\} = \mathbb{C}^{T.P.} \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}} \tag{7.11}$$

7.2.2 Campo de desplazamientos

Las ecuaciones geométricas del problema :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t) = \boldsymbol{\nabla}^S \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \boldsymbol{\nabla} + \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u}) \;\Rightarrow \tag{7.12}$$

pueden descomponerse en dos grupos:

1) Las que no afectan al desplazamiento u_z (y que serían hipotéticamente integrables en $\mathbb{R}^2$, en el dominio $x-y$):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x(x,y,t) &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y(x,y,t) &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy}(x,y,t) = 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{aligned}\right\} \text{integración en } \mathbb{R}^2 \Rightarrow \begin{cases} u_x = u_x(x,y,t) \\ u_y = u_x(x,y,t) \end{cases} \tag{7.13}$$

2) Aquellas en las que interviene el desplazamiento u_z:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z(x,y,t) &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \gamma_{xz}(x,y,t) = 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{yz}(x,y,t) = 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{7.14}$$

La observación de las ecuaciones (7.1) a (7.14) sugiere la consideración de un *problema elástico ideal de tensión plana reducido* a las dos dimensiones del plano de análisis y caracterizado por las siguientes incógnitas:

$$\mathbf{u}(x,y,t) \equiv \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\}(x,y,t) \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{\boldsymbol{\sigma}\}(x,y,t) \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{7.15}$$

en el que las incógnitas adicionales respecto al problema general, o bien son nulas, o bien son calculables en función de las (7.15), o bien no intervienen en el problema reducido:

$$\begin{aligned} &\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{xz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \\ &\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ &u_z(x,y,z,t) \rightarrow \text{No interviene en el problema} \end{aligned} \tag{7.16}$$

Observación 7-2

El problema de tensión plana es un problema elástico *ideal* puesto que no puede reproducirse exactamente como un caso particular del problema elástico en tres dimensiones. En efecto, no hay garantía de que la solución del problema reducido de tensión plana $u_x(x,y,t)$, $u_y(x,y,t)$ permita obtener una solución $u_z(x,y,z,t)$ para las ecuaciones geométricas adicionales (7.14).

7.3 Deformación plana

El estado de deformación se caracteriza por las siguientes hipótesis simplificativas:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} u_x(x,y,t) \\ u_y(x,y,t) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7.17}$$

También en éste caso resulta ilustrativo analizar en qué situaciones dichas hipótesis resultan plausibles. Consideremos, por ejemplo, un medio elástico cuya geometría y acciones pueden generarse a partir de una sección bidimensional (asociada al plano $x-y$ y con las acciones $\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{u}^*(\mathbf{x},t)$ y $\mathbf{t}^*(\mathbf{x},t)$ contenidas dicho plano) que se traslada sobre una generatriz recta perpendicular a la misma, asociada al eje z (ver Figura 7-3).

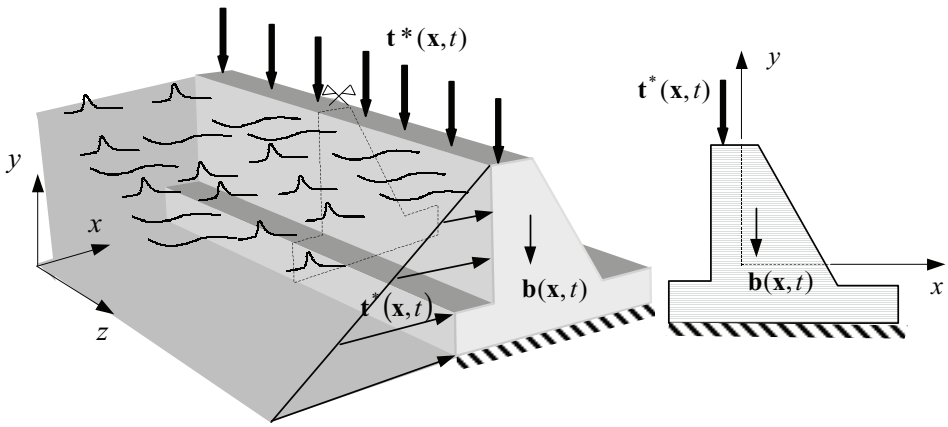


Figura 7-3– Ejemplo de estado de deformación plana

Las acciones del problema pueden caracterizarse entonces como:

$$\mathbf{b}=\begin{Bmatrix} b_x(x,y,t) \\ b_y(x,y,t) \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \Gamma_u : \mathbf{u}^* = \begin{Bmatrix} u_x^*(x,y,t) \\ u_y^*(x,y,t) \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \Gamma_\sigma : \mathbf{t}^* = \begin{Bmatrix} t_x^*(x,y,t) \\ t_y^*(x,y,t) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7.18}$$

y en la sección central (que presenta la simetría respecto al eje z) se cumple que:

$$u_z = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0 \tag{7.19}$$

y, por tanto, el campo de desplazamientos en dicha sección central es del tipo:

$$\mathbf{u}(x,y,t) \equiv \begin{Bmatrix} u_x(x,y,t) \\ u_y(x,y,t) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7.20}$$

7.3.1 Campos de deformaciones y de tensiones

Al campo de desplazamientos propio del estado de deformación plana (7.20) le corresponde el siguiente campo de deformaciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x,y,t) &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \varepsilon_z(x,y,t) &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \\ \varepsilon_y(x,y,t) &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \gamma_{xz}(x,y,t) &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{xy}(x,y,t) &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & \gamma_{yz}(x,y,t) &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{7.21}$$

con lo que el tensor de deformaciones tiene la siguiente estructura:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x,y,t) \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.22}$$

NOTA

Por analogía con el caso de tensión plana, el hecho de que todas las *deformaciones* no nulas estén contenidas en el plano $x-y$ da lugar al nombre de *deformación plana.*

Consideremos ahora la ecuación constitutiva elástica lineal:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} = \lambda Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2G\boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.23}$$

que aplicada al campo de deformaciones (7.21) proporciona las tensiones como:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2\mu\varepsilon_x = (\lambda + 2G)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2\mu\varepsilon_y = (\lambda + 2G)\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_x & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = 0 \\ \sigma_z &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \tag{7.24}$$

En vista de las ecuaciones (7.21) y (7.24), puede concluirse que *tampoco las tensiones dependen de la coordenada* z ($\Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(x, y, t)$). Por otra parte, en la ecuación (7.24) puede resolverse la tensión σ_z como:

$$\sigma_z = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}(\sigma_x + \sigma_y) = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \tag{7.25}$$

y el tensor de tensiones para el caso de deformación plana resulta:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, t) \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \tag{7.26}$$

donde las componentes no nulas del tensor de tensiones (7.26) se escriben:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2G)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_y\right] \\ \sigma_y &= (\lambda + 2G)\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_x = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_x\right] \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \end{aligned} \tag{7.27}$$

La ecuación (7.27) puede reescribirse en forma matricial como:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\sigma}\}} = \underbrace{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}}_{\mathbb{C}^{D.P.}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\varepsilon}\}} \Rightarrow \tag{7.28}$$

$$\boxed{\{\boldsymbol{\sigma}\} = \mathbb{C}^{D.P.} \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}}$$

Similarmente a lo que ocurre para el problema de tensión plana, las ecuaciones (7.20), (7.21) y (7.26) sugieren la consideración de un *problema elástico de deformación plana* reducido a las dos dimensiones del plano de análisis $x - y$ y caracterizado por las siguientes incógnitas:

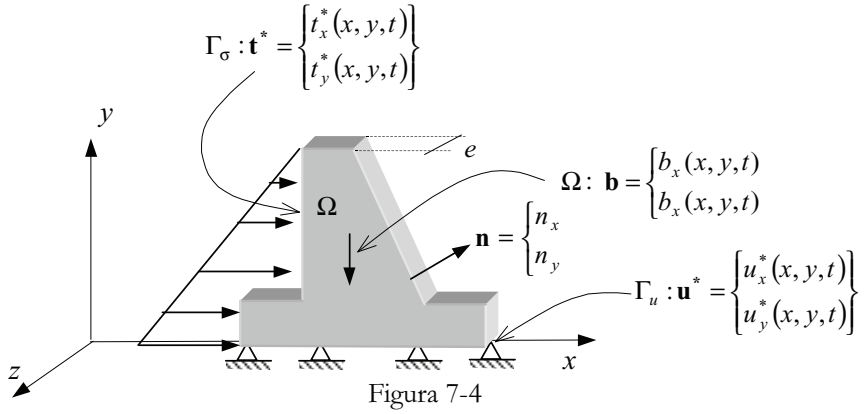
$$\mathbf{u}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{\boldsymbol{\sigma}\}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{7.29}$$

en el que las incógnitas adicionales respecto al problema general, o bien son nulas, o bien son calculables en función de las (7.29):

$$
\begin{aligned}
&u_z = 0 \\
&\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\
&\sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)
\end{aligned}
\tag{7.30}
$$

7.4 El problema elástico lineal en elasticidad bidimensional

A la vista de las ecuaciones de los apartados 7.2 y 7.3 el problema elástico-lineal para los problemas de tensión y deformación plana queda caracterizado como sigue (ver Figura 7-4):


$\Gamma_\sigma : \mathbf{t}^* = \begin{Bmatrix} t_x^*(x,y,t) \\ t_y^*(x,y,t) \end{Bmatrix}$
y
e
$\Omega : \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x(x,y,t) \\ b_x(x,y,t) \end{Bmatrix}$
Ω
$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}$
$\Gamma_u : \mathbf{u}^* = \begin{Bmatrix} u_x^*(x,y,t) \\ u_y^*(x,y,t) \end{Bmatrix}$
z
x
Figura 7-4

a) Ecuaciones:

Ecuación de Cauchy:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho b_x = \rho \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\
\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho b_y = \rho \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}
\end{cases}
\tag{7.31}
$$

NOTA

La tercera ecuación correspondiente a la componente z, o bien no interviene (tensión plana), o es idénticamente nula (deformación plana)

Ecuación constitutiva:

$$
\{\boldsymbol{\sigma}\} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \{\boldsymbol{\sigma}\} = \mathbb{C} \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}
\tag{7.32}
$$

dónde la matriz constitutiva $\mathbb{C}$ puede escribirse de forma genérica a partir de las ecuaciones (7.11) y (7.28) como:

$$
\mathbb{C} = \frac{\overline{E}}{1-\overline{\nu}^2} \begin{bmatrix} 1 & \overline{\nu} & 0 \\ \overline{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\overline{\nu}}{2} \end{bmatrix}
\qquad
\begin{array}{ll}
\text{Tensión} & \\
\text{plana} & \rightarrow \begin{cases} \overline{E} = E \\ \overline{\nu} = \nu \end{cases} \\
\text{Deformación} & \\
\text{plana} & \rightarrow \begin{cases} \overline{E} = \dfrac{E}{1-\nu^2} \\ \overline{\nu} = \dfrac{\nu}{(1-\nu)} \end{cases}
\end{array}
\tag{7.33}
$$

Ecuaciones geométricas:

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}} \tag{7.34}$$

Condiciones de contorno en el espacio:

$$\boxed{\Gamma_u: \ \mathbf{u}^* = \begin{Bmatrix} u_x^* = u_x^*(x,y,t) \\ u_y^* = u_y^*(x,y,t) \end{Bmatrix} \qquad \Gamma_\sigma: \quad \mathbf{t}^* = \begin{Bmatrix} t_x^* = t_x^*(x,y,t) \\ t_y^* = t_y^*(x,y,t) \end{Bmatrix}} \tag{7.35}$$

$$\mathbf{t}^* = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \qquad \boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}$$

Condiciones iniciales:

$$\boxed{\mathbf{u}(x,y,t)\big|_{t=0} = \mathbf{0} \qquad \dot{\mathbf{u}}(x,y,t)\big|_{t=0} = \mathbf{v}_0(x,y)} \tag{7.36}$$

b) Incógnitas

$$\boxed{\mathbf{u}(x,y,t) = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}(x,y,t) \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma}(x,y,t) \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}} \tag{7.37}$$

Las ecuaciones (7.31) a (7.37) definen un sistema de EDP's de 8 ecuaciones con 8 incógnitas a ser resuelto en el dominio espacio-temporal *reducido* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$. Una vez resuelto el problema, pueden calcularse explícitamente:

$$\begin{aligned} \text{Tensión plana} \ &\rightarrow \varepsilon_z = \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \text{Deformación plana} \ &\rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \tag{7.38}$$

7.5 Problemas asimilables a elasticidad bidimensional

7.5.1 Tensión Plana

Serán típicamente asimilables a estados de tensión plana aquellos estados tenso-deformacionales producidos en sólidos con *una dimensión sensiblemente inferior a las otras dos* (que configuran el plano de análisis $x-y$) *y con acciones contenidas en dicho plano*. La placa cargada en su plano medio y la viga de gran canto de la Figura 7-5 son típicos ejemplos de estructuras analizables en estado de tensión plana. Como caso particular, los problemas de *flexión simple y compuesta en vigas de plano medio*, considerados en la Resistencia de Materiales, pueden ser también asimilados a problemas de tensión plana.

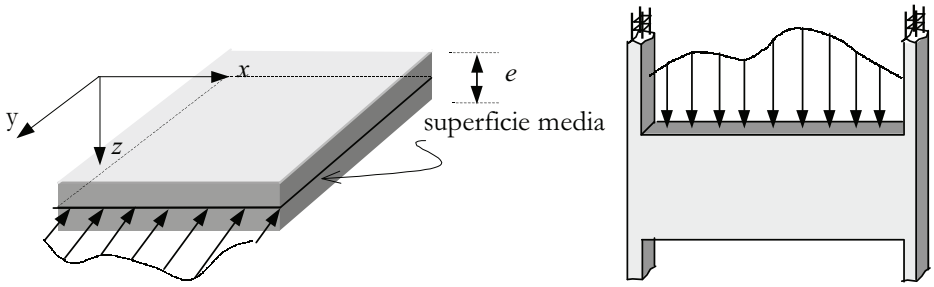


Figura 7-5–Placa cargada en su plano medio y viga de gran canto

7.5.2 Deformación plana

Serán típicamente asimilables a estados de deformación plana aquellos sólidos cuya geometría puede obtenerse como el resultado del desplazamiento de una *sección generatriz plana con acciones contenidas en su plano* (plano de análisis $x-y$) sobre una línea perpendicular a la misma. Además, la hipótesis de deformación plana $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ debe ser justificable. Típicamente, dicha situación se produce en dos circunstancias:

1) *La dimensión de la pieza en la dirección z es muy grande* (a efectos del análisis puede considerarse infinita). En este caso toda sección transversal central (no cercana a los extremos) puede considerarse de simetría y, por lo tanto, satisface las condiciones:

$$u_z = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0$$

de donde se concluyen las condiciones de partida del estado de deformación plana (7.17):

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} u_x(x,y,t) \\ u_y(x,y,t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ejemplos de este caso los encontramos en las tuberías bajo presión interna (y/o externa) de la Figura 7-6, el túnel de la Figura 7-7 o la zapata corrida de la Figura 7-8.

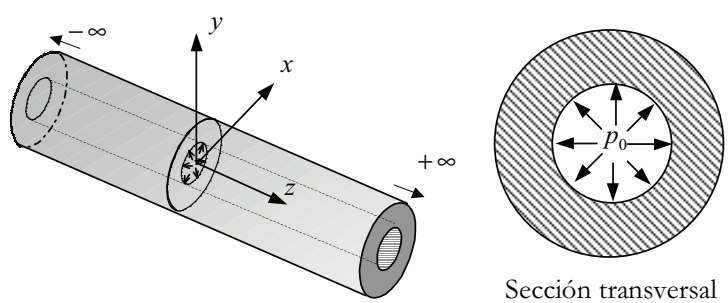
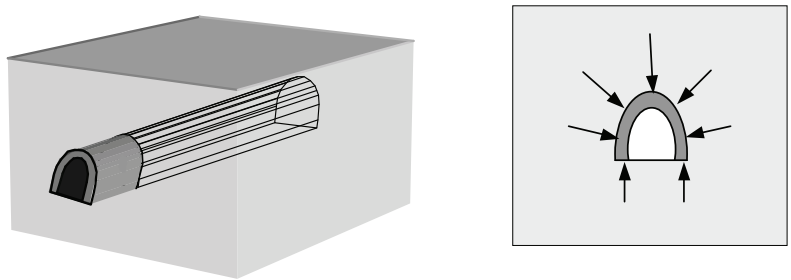


Figura 7-6– Tubo bajo presión



Sección transversal

Figura 7-7 – Túnel

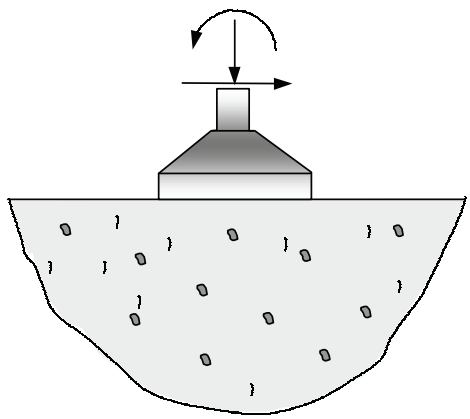
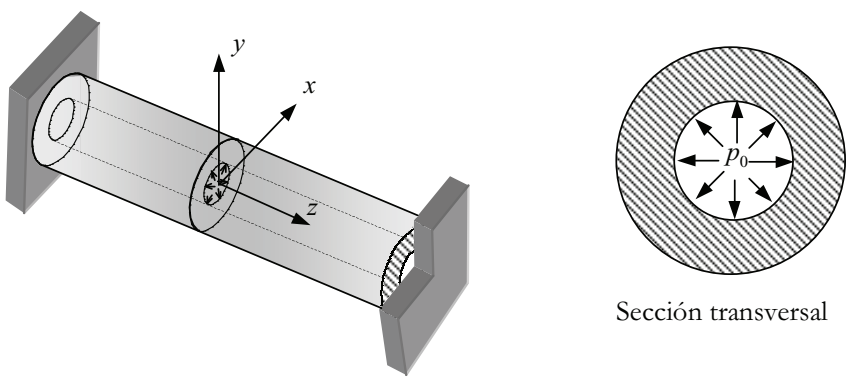


Figura 7-8– Zapata corrida

2) *La longitud de la pieza en la dirección longitudinal es reducida, pero el desplazamiento en la dirección z está impedido en las secciones extremas* (ver Figura 7-9).

En este caso la hipótesis de deformación plana (7.17) puede hacerse para todas las secciones transversales de la pieza



Sección transversal

Figura 7-9

7.6 Curvas representativas de los estados planos de tensión

Hay una importante tradición en ingeniería de representar gráficamente la distribución de los estados tensionales planos. Para ello se recurre a ciertas familias de curvas cuyo trazado sobre el plano de análisis proporciona información útil sobre dicho estado tensional.

7.6.1 Líneas isostáticas

Definición

Líneas isostáticas: son las *envolventes* del campo vectorial determinado por las tensiones principales.

Por definición de envolvente de un campo vectorial, las líneas isostáticas serán, en cada punto, tangentes a las dos direcciones principales y, por lo tanto, habrá dos familias de líneas isostáticas:

- *Isostáticas* σ_1, tangentes a la tensión principal mayor.
- *Isostáticas* σ_2, tangentes a la tensión principal menor

Además, puesto que las tensiones principales son ortogonales entre sí, *ambas familias de curvas serán también ortogonales*. Las líneas isostáticas informan sobre el modo en que transcurre sobre el plano de análisis el flujo de tensiones principales.

Como ejemplo, en la Figura 7-10 se presenta la distribución de líneas isostáticas sobre una viga apoyada con carga uniformemente distribuida.

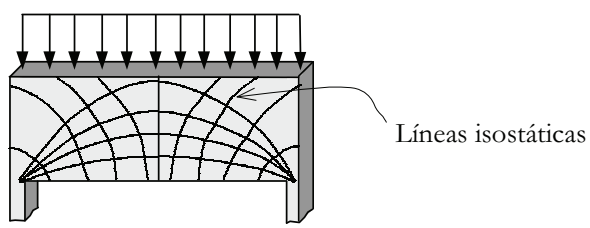


Figura 7-10

Definiciones:

Punto singular: Punto caracterizado por un estado tensional: $\boxed{\begin{array}{l}\sigma_x = \sigma_y \\ \tau_{xy} = 0\end{array}}$

Su círculo de Mohr es *un punto* del eje σ (ver Figura 7-11)

Punto neutro: Punto singular caracterizado por un estado tensional:

$$\boxed{\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0}$$

Su círculo de Mohr es el *origen* del espacio $\sigma - \tau$ (ver Figura 7-11).

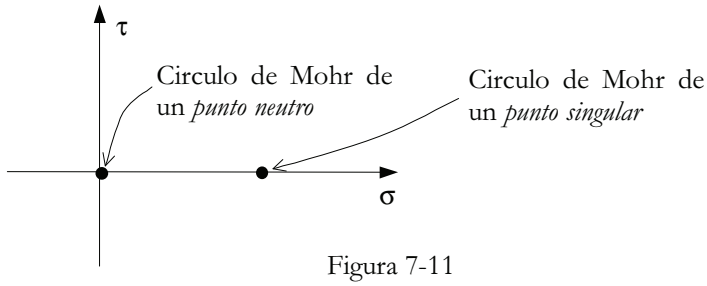


Figura 7-11

Observación 7-3

En un punto singular todas las direcciones son principales (el Polo es el propio círculo de Mohr (ver Figura 7-11). En consecuencia, en los puntos singulares las líneas isostáticas suelen perder su regularidad y *pueden cambiar bruscamente de dirección.*

7.6.1.1 Ecuación diferencial de las líneas isostáticas

Considerando la ecuación genérica de una isostática $y = f(x)$ y el valor de ángulo formado por la dirección principal σ_1 con la horizontal (ver Figura 7-12):

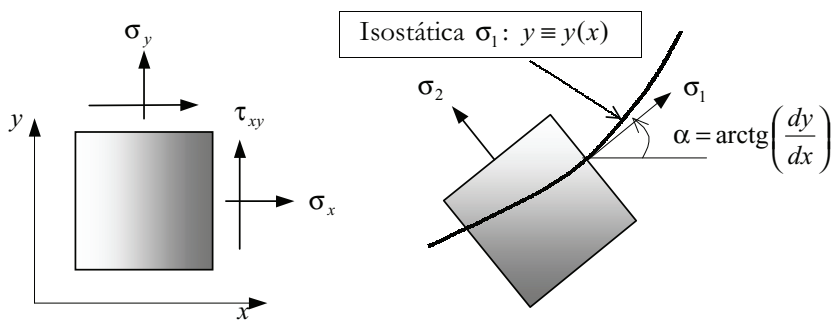


Figura 7-12

$$\left.\begin{aligned} \text{tg}(2\alpha) &= \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\,\alpha} \\ \text{tg}\,\alpha &= \frac{dy}{dx} \overset{not}{=} y' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\,y'}{1-(y')^2} \Rightarrow$$

$$(y')^2 + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\tau_{xy}}\, y' - 1 = 0 \qquad (7.39)$$

y resolviendo la ecuación de segundo grado de (7.39) en y', se obtiene la ecuación diferencial de las isostáticas:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ecuación}\\ \text{diferencial de}\\ \text{las isostáticas}\end{array}\right\} \rightarrow \quad \underbrace{y' = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}\right)^2 + 1}}_{\varphi(x,y)} \qquad (7.40)$$

Conocida la función $\varphi(x,y)$ en la ecuación (7.40), puede integrarse dicha ecuación para obtener la ecuación algebraica la familia de isostáticas:

$$y = f(x) + C \tag{7.41}$$

El doble signo en la ecuación (7.40) dará lugar a dos ecuaciones diferenciales correspondientes a las dos familias ortogonales de isostáticas.

Ejemplo 7-1 – *Una placa está sometida al siguiente estado tensional (ver Figura 7-13):*

$$\sigma_x = -x^3 \quad ; \quad \sigma_y = 2x^3 - 3xy^2 \quad ; \quad \tau_{xy} = 3x^2 y \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$$

Obtener y dibujar los puntos singulares y la red de isostáticas.

Resolución:

a) Puntos singulares: se definen según: $\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$

$$\tau_{xy} = 3x^2 y = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_x = -x^3 = 0 \\ \sigma_y = 2x^3 - 3xy^2 = 0 \end{cases} \quad \forall y \\ y = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{cases} \sigma_x = -x^3 \\ \sigma_y = 2x^3 - 3xy^2 = 2x^3 \end{cases}\right\} \quad \Rightarrow \quad x = 0 \end{cases}$$

Luego el lugar geométrico de los puntos singulares es la recta: $\boxed{x = 0}$. Dichos puntos singulares son además puntos neutros ($\sigma_x = \sigma_y = 0$).

b) Líneas isostáticas: De la ecuación (7.40):

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}\right)^2 + 1}$$

que, para los datos del problema, resulta:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y}{x} \end{cases} \Rightarrow \text{integrando:} \quad \boxed{\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ xy = C_2 \end{cases}}$$

por tanto, *las isostáticas son dos familias de hipérbolas equiláteras ortogonales entre sí.*

Sobre la recta singular de puntos singulares $x = 0$ (que divide a la placa en dos regiones) las líneas isostáticas cambiarán bruscamente de pendiente. Para identificar la familia de isostáticas σ_1 tomemos un punto en cada región:

– Punto $(1,0)$: $\sigma_x = \sigma_2 = -1$; $\sigma_y = \sigma_1 = +2$; $\tau_{xy} = 0$
(isostática σ_1 en la dirección y)

– Punto $(-1,0)$: $\sigma_x = \sigma_1 = +1$; $\sigma_y = \sigma_2 = -2$; $\tau_{xy} = 0$
(isostática σ_1 en la dirección x)

Por tanto, la red de las isostáticas es la indicada en la Figura 7-13.

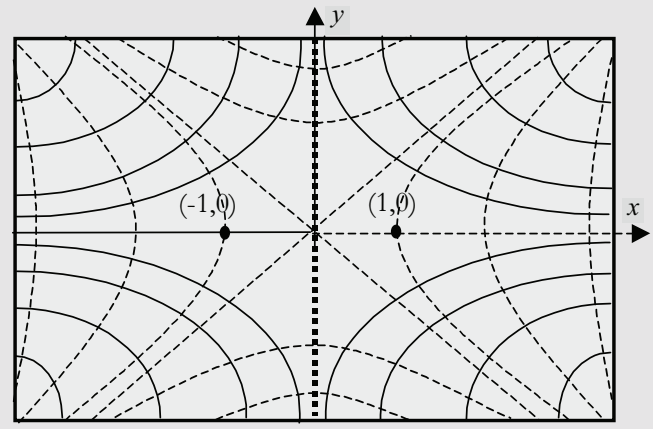


Figura 7-13

7.6.2 Líneas isoclinas

Definición

Líneas isoclinas: lugar geométrico de los puntos del plano de análisis en los que las tensiones principales forman un determinado ángulo con el eje x.

Por su propia definición, en todos los puntos de una misma isoclina las tensiones principales son paralelas entre sí, formando un ángulo constante θ (que caracteriza a la isoclina) con el eje x (ver Figura 7-14).

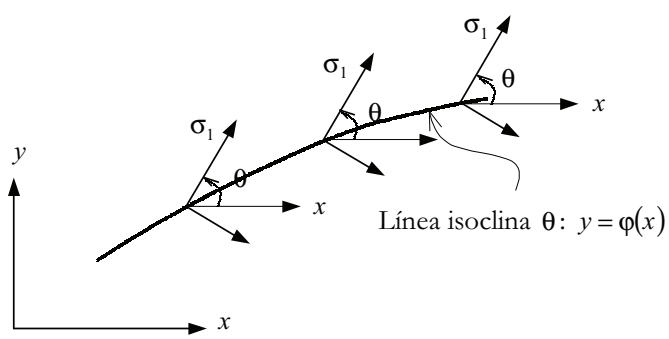


Figura 7-14– Línea isoclina

7.6.2.1 Ecuación de las isoclinas

Para obtener la ecuación $y = f(x)$ de la isoclina de ángulo θ, se establece que la tensión principal σ_1 forma un ángulo $\alpha = \theta$ con la horizontal, es decir:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ecuación}\\ \text{algebraica de}\\ \text{las isoclinas}\end{array}\right\} \rightarrow \quad \operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2\tau_{xy}}{\underbrace{\sigma_x - \sigma_y}_{\varphi(x,y)}} \tag{7.42}$$

ecuación algebraica que para cada valor de θ permite despejar:

$$y = f(x, \theta) \tag{7.43}$$

que constituye la ecuación de la familia de curvas isoclinas parametrizada en función del ángulo θ.

Observación 7-4

La determinación de la familia de las isoclinas permite conocer, en cada punto del medio, la dirección de las tensiones principales y, por lo tanto, plantear la obtención de las líneas isostáticas. Puesto que las isoclinas pueden ser determinadas mediante métodos experimentales (métodos basados en la fotoelasticidad) *proporcionan, indirectamente, un método para la determinación experimental de las líneas isostáticas.*

7.6.3 Líneas isobaras

Definición

Líneas isobaras: lugar geométrico de los puntos del plano de análisis con el mismo valor de la tensión principal σ_1 (o σ_2)

Por cada punto del plano de análisis pasarán dos familias de curvas isobaras: una correspondiente a σ_1 y otra a σ_2. Las líneas isobaras dependen del valor de σ_1, pero no de su dirección (ver Figura 7-15).

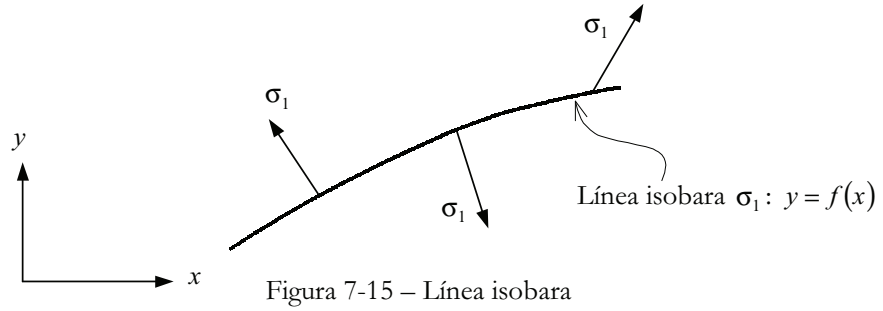


Figura 7-15 – Línea isobara

7.6.3.1 Ecuación de las isobaras

La ecuación que proporciona el valor de las tensiones principales (ver capítulo 4) define en forma implícita la ecuación algebraica de las dos familias de isobaras $y = f_1(x, c_1)$ e $y = f_2(x, c_2)$:

$$\text{Ecuación algebraica de las isobaras} \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \underbrace{\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}_{\varphi_1(x,y)} = ctte = c_1 \\ \sigma_2 = \underbrace{\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}_{\varphi_2(x,y)} = ctte = c_2 \end{cases} \tag{7.44}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x, c_1) \\ y_2 = f_2(x, c_2) \end{cases}$$

7.6.4 Líneas de máxima tensión cortante

Definición

Líneas de máxima tensión cortante (o tangencial): son las envolventes de las direcciones que, en cada punto, corresponden a la máxima (en módulo) tensión tangencial.

Observación 7-5

En cada punto del plano de análisis hay dos planos sobre los cuales las tensiones tangenciales toman el mismo valor máximo (en módulo) y signo contrario τ_{max} y τ_{min}. Estos planos pueden determinarse con ayuda del círculo de Mohr *y forman una ángulo de 45º con las direcciones principales* (ver Figura 7-16). Por consiguiente sus envolventes (las líneas de máxima tensión cortante) son dos familias de curvas *ortogonales entre sí* que forman un ángulo de 45º con las líneas isostáticas.

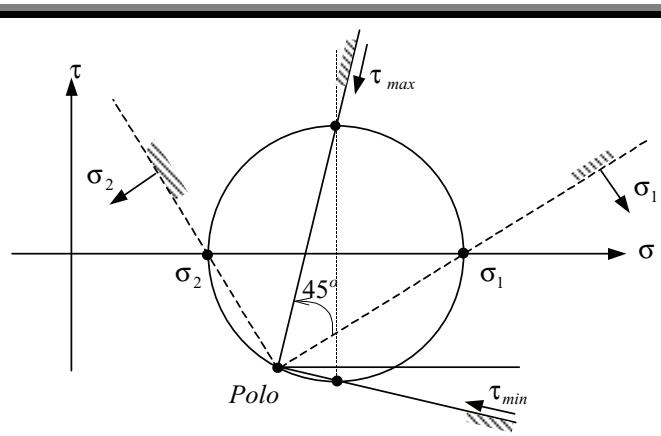


Figura 7-16– Planos de máxima tensión cortante

7.6.4.1 Ecuación diferencial de las líneas de máxima tensión tangencial

NOTA

Se utiliza aquí la expresión trigonométrica:

$$tang(\theta-\frac{\pi}{2})=$$

$$=-\cot\theta=-\frac{1}{tang\,\theta}$$

Sea β el ángulo formado por la dirección de τ_{max} con la horizontal (ver Figura 7-17). De acuerdo con la Observación 7-5, se tiene:

$$\beta=\alpha-\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad tang(2\beta)=tang(2\alpha-\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{tang\,2\alpha} \tag{7.45}$$

donde α es el ángulo formado por la tensión principal σ_1 con la horizontal. En consecuencia, considerando la ecuación genérica de una línea de máxima tensión tangencial $y=f(x)$, la ecuación (7.45) y la relación $tang\ 2\alpha=\dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{tg}(2\beta)=-\dfrac{1}{tang\,(2\alpha)}=-\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}=\dfrac{2\,tang\,\beta}{1-tang^2\beta} \\ \mathrm{tg}(\beta)=\dfrac{dy}{d\,x}\overset{not}{=}y' \end{array}\right\} \Rightarrow\ -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}=\frac{2\,y'}{1-(y'} \tag{7.46}$$

$$\Rightarrow\ (y')^2-\frac{4\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\,y'-1=0$$

y resolviendo la ecuación de segundo grado de (7.46) en y', se obtiene la ecuación diferencial de las líneas de máxima tensión cortante:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ecuación diferencial}\\ \text{de las lineas de náxima}\\ \text{tensión cortante}\end{array}\right\} \rightarrow\quad y'=\underbrace{\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\pm\sqrt{\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\right)^2+1}}_{\varphi(x,y)} \tag{7.47}$$

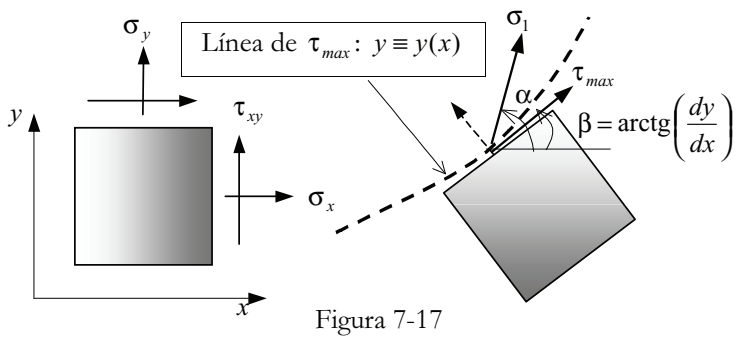


Figura 7-17

Conocida la función $\varphi(x,y)$ en la ecuación (7.47), puede integrarse dicha ecuación diferencial y obtener la ecuación algebraica de las dos familias de curvas ortogonales (correspondientes al doble signo en la ecuación (7.47)).

8 Plasticidad

8.1 Introducción

Los modelos (ecuaciones constitutivas) elastoplásticos se utilizan en Mecánica de Medios Continuos para representar el comportamiento mecánico de materiales cuando se sobrepasan ciertos límites en los valores de las tensiones (o de las deformaciones) y dicho comportamiento deja de ser representable mediante modelos más simples como son los elásticos. En este capítulo se van a estudiar dichos modelos considerando, en todos los casos, que *las deformaciones son infinitesimales.*

A grandes rasgos, la Plasticidad introduce dos grandes modificaciones sobre la Elasticidad lineal estudiada en los capítulos 6 y 7:

1) *La pérdida de linealidad* (las tensiones ya no son proporcionales a las deformaciones).

2) La aparición del concepto de *deformación plástica o permanente*. Una parte de la deformación que se genera durante el proceso de carga no se recupera durante el proceso de descarga.

8.2 Nociones previas

NOTA

Los conceptos de este apartado son un recordatorio de los considerados en el capítulo 4, apartados 4.4.4 a 4.4.7.

8.2.1 Invariantes tensionales

Sea $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones de Cauchy y su matriz de componentes en una base asociada a los ejes cartesianos $\{x, y, z\}$ (ver Figura 8-1):

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

Al tratarse de un tensor simétrico de segundo orden, diagonalizará en una base ortonormal y todos sus autovalores serán números reales. Sea entonces $\{x', y', z'\}$ un sistema de ejes cartesianos asociado a la base en el que $\boldsymbol{\sigma}$ diagonaliza (autovectores de $\boldsymbol{\sigma}$). Su matriz de componentes en dicha base será:

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{x'y'z'} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

donde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, denominadas ten*siones principales*, son los autovalores de $\boldsymbol{\sigma}$ y a las direcciones asociadas a los ejes $\{x', y', z'\}$ se las denomina *direcciones principales* (ver Figura 8-1).

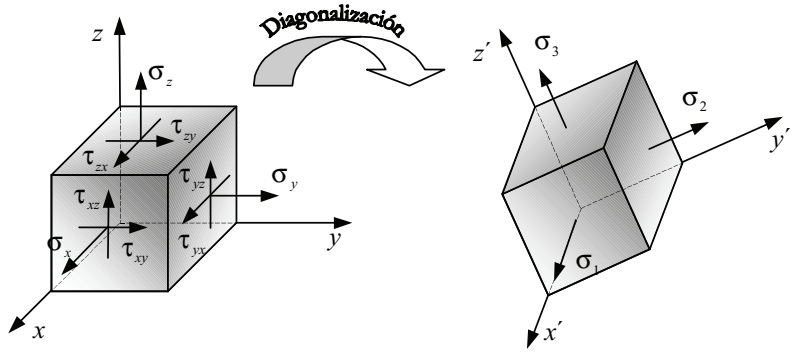


Figura 8-1 – Diagonalización del tensor de tensiones.

Para obtener las tensiones y las direcciones principales de $\boldsymbol{\sigma}$, hay que resolver el correspondiente problema de autovalores y autovectores:

$$\text{Encontrar } \lambda \text{ y } \mathbf{v} \text{ tal que: } \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \;\Rightarrow\; [\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{1}] \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{8.3}$$

donde λ corresponde a los autovalores y $\mathbf{v}$ a los autovectores. Condición necesaria y suficiente para que el sistema (8.3) tenga solución es que:

$$\det[\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{1}] = |\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{1}| = 0 \tag{8.4}$$

que en componentes resulta:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{8.5}$$

El desarrollo algebraico de la ecuación (8.5), denominada *ecuación característica*, corresponde a una ecuación polinómica de tercer grado en λ, que puede escribirse como:

$$\boxed{\lambda^3 - I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda - I_3 = 0} \tag{8.6}$$

donde los coeficientes $I_1(\sigma_{ij}), I_2(\sigma_{ij})$ e $I_3(\sigma_{ij})$ son unas ciertas funciones de las componentes σ_{ij} del tensor $\boldsymbol{\sigma}$ en el sistema de coordenadas $\{x, y, z\}$. Sin embargo, las soluciones de la ecuación (8.6), que serán función de los coeficientes de la misma (I_1, I_2, I_3), son las tensiones principales que, por otra parte, son independientes de cual sea el sistema de ejes en el cual se haya expresado $\boldsymbol{\sigma}$. En consecuencia, dichos coeficientes deben de ser *invariantes* frente a cualquier cambio de base. Por este motivo, a los coeficientes I_1, I_2 e I_3 se les denomina *invariantes I* o invariantes fundamentales y su expresión (tras el correspondiente desarrollo de la ecuación (8.5)) resulta ser:

$$\text{Invariantes } I :\rightarrow \begin{cases} I_1 = Tr(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{ii} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} - I_1^2\right) = -\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right) \\ I_3 = \det(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3 \end{cases} \tag{8.7}$$

Evidentemente, cualquier función escalar de los invariantes será también un invariante y, por consiguiente, a partir de los invariantes I, definidos en (8.7) se pueden definir nuevos invariantes. En particular, definiremos los denominados *invariantes* J :

$$\text{Invariantes J} \rightarrow \begin{cases} J_1 = I_1 = \sigma_{ii} = Tr(\boldsymbol{\sigma}) \\ J_2 = \frac{1}{2}\left(I_1^2 + 2I_2\right) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ji} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}\right) = \frac{1}{2}Tr(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \\ J_3 = \frac{1}{3}\left(I_1^3 + 3I_1 I_2 + 3I_3\right) = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} = \frac{1}{3}Tr\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \end{cases} \tag{8.8}$$

Observación 8-1

a) Nótese que si: $I_1 = 0 \;\Rightarrow\; J_i = I_i \qquad i \in \{1,2,3\}$.

b) Los invariantes J_i, $i \in \{1,2,3\}$, pueden expresarse de forma unificada y compacta mediante la expresión:

$$J_i = \frac{1}{i}Tr(\boldsymbol{\sigma}^i) \qquad i \in \{1,2,3\}$$

8.2.2 Componentes esférica y desviadora del tensor de tensiones

Dado el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$, se define *la tensión media* σ_m como:

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} = \frac{1}{3}Tr(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3}(\sigma_{ii}) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tag{8.9}$$

y la *presión media* $\overline{p}$ como:

$$\overline{p} = -\sigma_m \tag{8.10}$$

El tensor de tensiones de Cauchy puede descomponerse en una parte (o componente) *esférica* $\boldsymbol{\sigma}_{esf}$ y una parte (o componente) *desviadora* $\boldsymbol{\sigma}'$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{esf} + \boldsymbol{\sigma}' \tag{8.11}$$

donde la parte esférica del tensor de tensiones se define como:

$$\boldsymbol{\sigma}_{esf} :\overset{def}{=} \frac{1}{3} Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} = \sigma_m \mathbf{1}$$
$$\boldsymbol{\sigma}_{esf} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \tag{8.12}$$

y, de las ecuaciones (8.11) y (8.12), la parte desviadora resulta ser:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{esf} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} \tag{8.13}$$

Los invariantes I y J del tensor desviador $\boldsymbol{\sigma}'$, que se denominarán invariantes I' y J', resultan, tras considerar las ecuaciones (8.7), (8.8), (8.9) y (8.13):

$$\text{Invariantes } J' \rightarrow \begin{cases} J_1' = I_1' = 0 \\ J_2' = I_2' = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}') = \frac{1}{2}\sigma_{ij}'\sigma_{ji}' \\ J_3' = I'_3 = \frac{1}{3}(\sigma_{ij}'\sigma_{jk}'\sigma_{ki}') \end{cases} \tag{8.14}$$

Observación 8-2

Se puede demostrar fácilmente que *las direcciones principales de* $\boldsymbol{\sigma}$ *coinciden con las de* $\boldsymbol{\sigma}'$, es decir, que ambos tensores diagonalizan en la misma base. En efecto, si se trabaja en la base asociada a las direcciones principales de $\boldsymbol{\sigma}$, es decir, la base en la que diagonaliza $\boldsymbol{\sigma}$, y puesto que $\boldsymbol{\sigma}_{esf}$ es un tensor hidrostático y por lo tanto es diagonal en cualquier base, entonces $\boldsymbol{\sigma}'$ también diagonaliza en la misma base (ver Figura 8-2).

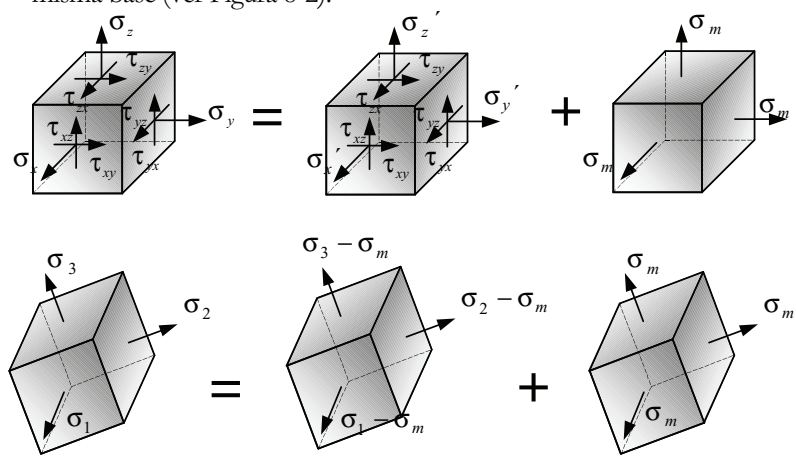


Figura 8-2. Diagonalización de las componentes esférica y desviadora

Observación 8-3

Se define como *tensión efectiva o tensión uniaxial equivalente* $\overline{\sigma}$ al escalar:

$$\overline{\sigma} = \sqrt{3J_2'} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{\sigma}'}$$

La denominación tensión uniaxial equivalente se justifica porque su valor para un estado de tensión uniaxial coincide con dicha tensión uniaxial (ver Ejemplo 8-1).

Ejemplo 8-1 – *Calcular el valor de la tensión uniaxial equivalente (o tensión efectiva)* $\overline{\sigma}$ *para un estado de tensión uniaxial definido por:*

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolución:

a) Tensión media: $\sigma_m = \frac{1}{3} Tr(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sigma_u}{3}$

b) Componente esférica: $\boldsymbol{\sigma}_{esf} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_u}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_u}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_u}{3} \end{bmatrix}$

c) Componente desviadora:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{esf}} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_u - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_u & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_u \end{bmatrix}$$

Tensión efectiva: $\overline{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma_u^2\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{2}{3}}|\sigma_u| = |\sigma_u| \Rightarrow$

$$\boxed{\overline{\sigma} = |\sigma_u|}$$

NOTA

El espacio de tensiones principales también es conocido con el nombre de *espacio de tensiones de Haigh-Westergaard.*

8.3 Espacio de tensiones principales

Consideremos un sistema de ejes cartesianos en $\mathbb{R}^3$ $\{x \equiv \sigma_1, y \equiv \sigma_2, z \equiv \sigma_3\}$ de tal forma que a cada estado tensional, caracterizado por los valores de las tres

tensiones principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, le corresponde un punto en dicho espacio al que *denominaremos espacio de tensiones principales* (ver Figura 8-3).

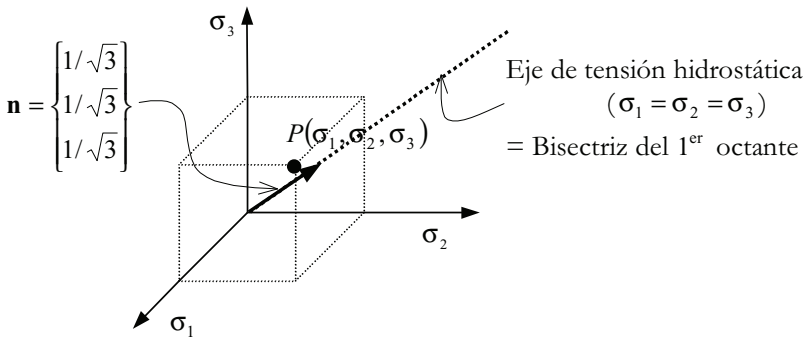


Figura 8-3 – Espacio de tensiones principales

Definición:

Eje de tensión hidrostática: Es el lugar geométrico de los puntos del espacio de tensiones principales que verifican la condición $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (ver Figura 8-3). Los puntos situados sobre el eje de tensión hidrostática representan estados tensionales hidrostáticos (ver capítulo 4, apartado 4.4.5).

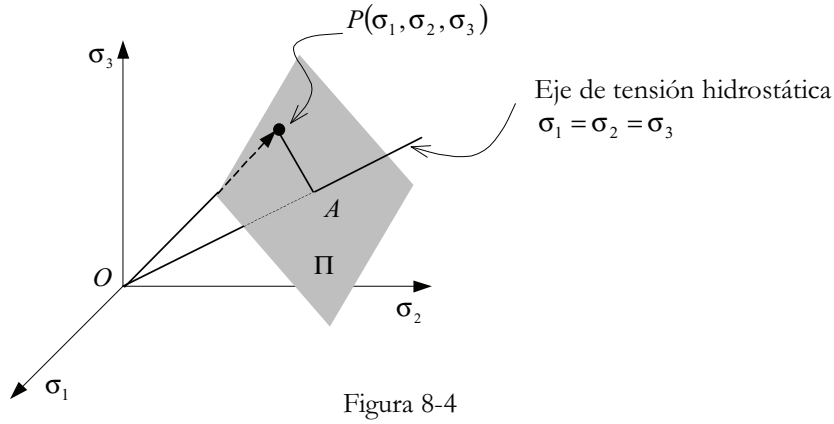


Figura 8-4

Definición:

Plano octaédrico Π : Cualquiera de los planos normales al eje de tensión hidrostática (ver Figura 8-4). La ecuación de un plano octaédrico es:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = ctte$$

y la normal (unitaria) al mismo es:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1,\ 1,\ ,1\}^T$$

8.3.1 Tensiones sigma y tau octaedrica

Sea P un punto del espacio de tensiones principales, de coordenadas $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ y vector posición $\overline{OP}=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}^T$ (ver Figura 8-5). Consideremos el plano octaédrico Π que pasa por el punto P, y sea A la intersección del eje de tensión hidrostática con dicho plano.

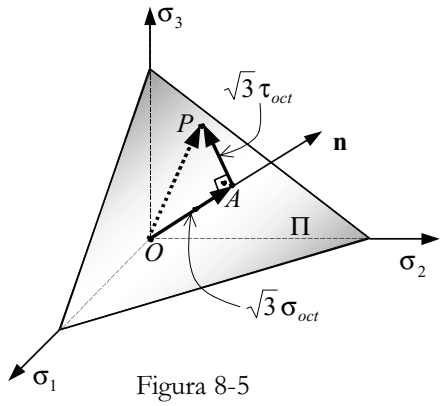


Figura 8-5

Definiciones:

- Tensión *sigma octaédrica:* $|\overline{OA}|=\sqrt{3}\,\sigma_{oct}$
- Tensión *tau octaédrica:* $|\overline{AP}|=\sqrt{3}\,\tau_{oct}$

Observación 8-4

- σ_{oct} informa de la distancia entre el origen O y el plano octaédrico que pasa por el punto P. El lugar geométrico de los puntos del espacio de tensiones principales con igual σ_{oct} es el plano octaédrico que está a una distancia $\sqrt{3}\,\sigma_{oct}$ del origen.
- τ_{oct} informa de la distancia entre el punto P y el eje de tensión hidrostática. Es pues una medida de la distancia que separa el estado caracterizado por el punto P de un estado de tensión hidrostática. El lugar geométrico de los puntos del espacio de tensiones principales con igual τ_{oct} es un cilindro cuyo eje es el eje de tensión hidrostática y cuyo radio es $\sqrt{3}\,\tau_{oct}$.

La distancia $|\overline{OA}|$ se puede calcular como la proyección del vector $\overline{OP}$ sobre $\mathbf{n}$ (la normal unitaria al plano octaédrico):

$$\left.\begin{aligned} |\overline{OA}| &= \overline{OP}\cdot\mathbf{n} = \{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}\begin{Bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = \sqrt{3}\,\sigma_m \\ |\overline{OA}| &= \sqrt{3}\,\sigma_{oct}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \tag{8.15}$$

$$\boxed{\sigma_{oct} = \sigma_m = \frac{I_1}{3}} \tag{8.16}$$

donde se ha tenido en cuenta la definición (8.9) de la tensión media σ_m.

La distancia $|\overline{AP}|$ puede calcularse resolviendo el triángulo rectángulo OAP de la Figura 8-5:

$$|\overline{AP}|^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OA}^2 = \sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2 - \frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2 \tag{8.17}$$

Mediante algunas operaciones algebraicas esta distancia puede expresarse en función del segundo invariante, J_2', del tensor de tensiones desviador de la ecuación (8.14) como:

$$\left.\begin{aligned} |\overline{AP}|^2 &= 2J_2' \Rightarrow |\overline{AP}| = \sqrt{2}(J_2')^{1/2} \\ |\overline{AP}| &= \sqrt{3}\,\tau_{oct}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,[J_2']^{1/2}} \tag{8.18}$$

Expresiones alternativas de τ_{oct} en función del valor de J_2' en la ecuación (8.14) son:

$$\begin{aligned} \tau_{oct} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2 - \frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2\right]^{1/2} \\ \tau_{oct} &= \frac{1}{3\sqrt{3}}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2\right]^{1/2}\end{aligned} \tag{8.19}$$

Observación 8-5

- Si el estado tensional $\boldsymbol{\sigma}$ es puramente *esférico*:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{esf} = \sigma_m\mathbf{1} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{esf} = \mathbf{0} \Leftrightarrow J_2' = 0 \Leftrightarrow \boxed{\tau_{oct} = 0}$$

(un estado esférico queda caracterizado por $\tau_{oct} = 0$ y, por tanto, pertenece al eje de tensión hidrostática, ver Figura 8-5).

- Si el estado tensional $\boldsymbol{\sigma}$ es puramente *desviador*:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' \Leftrightarrow \sigma_m = Tr(\boldsymbol{\sigma}) = Tr(\boldsymbol{\sigma}') = 0 \Leftrightarrow \boxed{\sigma_{oct} = 0}$$

(un estado desviador queda caracterizado por $\sigma_{oct} = 0$ y pertenece al plano octaédrico que pasa por el origen).

Observación 8-6

Un punto P del espacio de tensiones principales queda unívocamente caracterizado por los tres invariantes $I_1 \equiv J_1, J_2', J_3'$ (ver Figura 8-6):

- I_1 (a través de $\sigma_{oct} = \frac{1}{3} I_1$) caracteriza la distancia al origen ($= \sqrt{3}\ \sigma_{oct}$) del plano octaédrico Π sobre el que está el punto (sitúa al punto P sobre un cierto plano octaédrico).
- J_2' caracteriza la distancia del punto al eje de tensión hidrostática (sitúa al punto P sobre un círculo del plano octaédrico con centro en el eje de tensión hidrostática y radio $\sqrt{3}\ \tau_{oct} = \sqrt{2}\left[J_2'\right]^{1/2}$).
- J_3' caracteriza la posición del punto dentro del círculo definiendo el ángulo $\theta(J_3')$.

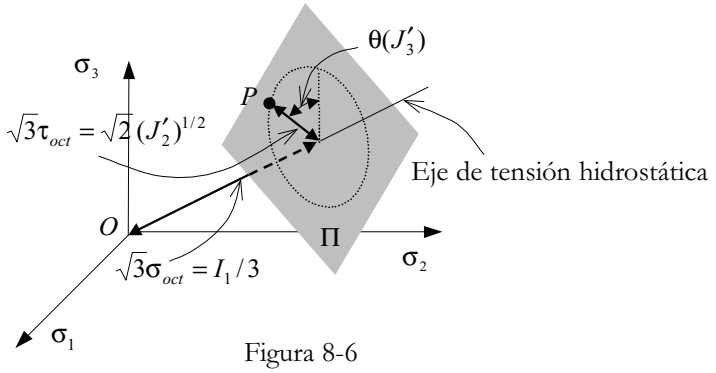


Figura 8-6

Observación 8-7

La Figura 8-7 muestra la proyección del espacio de tensiones principales sobre el plano octaédrico Π. En dicha proyección puede observarse la división del espacio de tensiones principales en seis sectores, caracterizados por las seis posibles ordenaciones distintas de dichas tensiones y separados por las proyecciones de los planos bisectores $\sigma_2 = \sigma_3$, $\sigma_1 = \sigma_3$ y $\sigma_1 = \sigma_2$. La elección del criterio $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ reduce automáticamente el dominio de trabajo factible al sector sombreado en la figura y la intersección de cualquier superficie, del tipo $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$, con el plano Π se reduce a una curva en dicho sector. Sin embargo, resulta automático extender dicha curva a los demás sectores (es decir, dibujar la curva que se obtendría con la misma función $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$, pero considerando las distintas ordenaciones de las tensiones principales) sin más que aprovechar las condiciones de simetría respecto a los planos bisectores. La curva resultante, por lo tanto, presentará tres ejes de simetría respecto a cada uno de los ejes de la Figura 8-7.

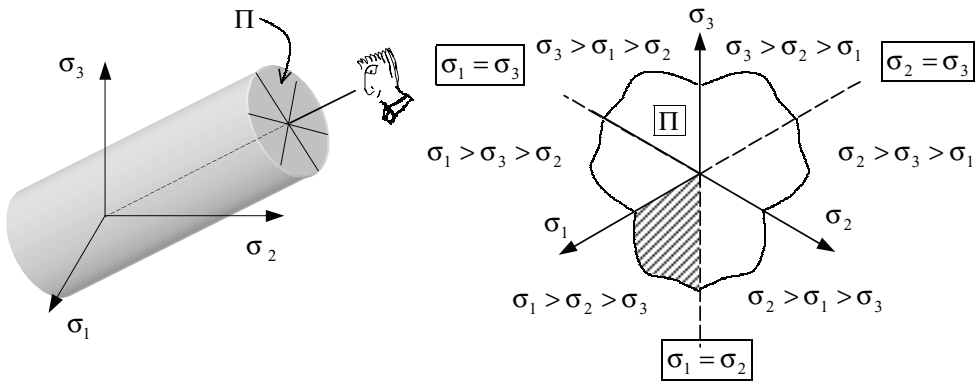


Figura 8-7 – Proyección sobre el plano octaédrico

8.4 Modelos reológicos de fricción

Los *modelos reológicos* son idealizaciones de modelos mecánicos, construidos como combinación de *elementos* simples, cuyo comportamiento es fácilmente intuible, y que permiten percibir comportamientos mecánicos más complejos. Se utilizarán aquí modelos reológicos de fricción para introducir el concepto de deformación irrecuperable o permanente y sus consecuencias como paso previo al análisis de los modelos elastoplásticos.

8.4.1 Elemento elástico (elemento muelle)

El modelo reológico elástico viene definido por un muelle de constante E (ver Figura 8-8). El modelo establece que existe proporcionalidad entre la tensión y la deformación, tanto en carga como en descarga, siendo la constante E, el factor de proporcionalidad (ver Figura 8-8).

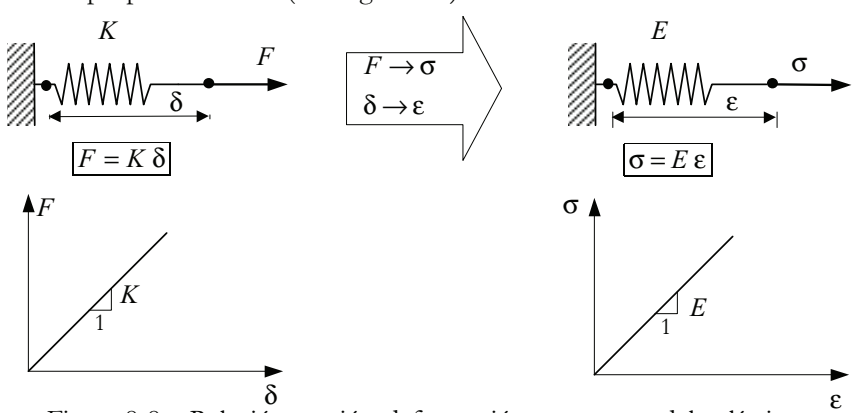


Figura 8-8 – Relación tensión-deformación para un modelo elástico

8.4.2 Elemento de fricción

NOTA

El modelo de fricción de Coulomb también recibe el nombre de *modelo de fricción seca.*

Consideremos un bloque situado sobre una superficie rugosa (ver Figura 8-9), y sometido a una fuerza de compresión N y a una fuerza horizontal F (positiva, hacia la derecha, y negativa hacia la izquierda). Sea δ el desplazamiento horizontal del bloque. El modelo de fricción de Coulomb establece que el módulo de la reacción R ejercida por la superficie de contacto

sobre el bloque no puede exceder de un cierto valor límite $F_u = \mu N$, donde $\mu \geq 0$ es el *coeficiente de rozamiento* entre el bloque y la superficie. En consecuencia, mientras el módulo de la fuerza F sea menor que dicho valor límite, el bloque no se mueve. Una vez alcanzado el valor límite $F_u = \mu N$, el bloque empieza a desplazarse en un estado de cuasi-equilibrio (sin producir aceleraciones) y, si se desea permanecer en régimen cuasi-estático, dicho valor límite no puede excederse. Estos conceptos pueden expresarse matemáticamente como:

$$\begin{aligned} |F| < \mu N \quad &\Leftrightarrow \quad \delta = 0 \quad (\text{No hay movimiento}) \\ |F| = \mu N \quad &\Leftrightarrow \quad \delta \neq 0 \quad (\text{Hay movimiento}) \\ |F| > \mu N \quad &\qquad\quad\;\; (\text{Imposible}) \end{aligned} \tag{8.20}$$

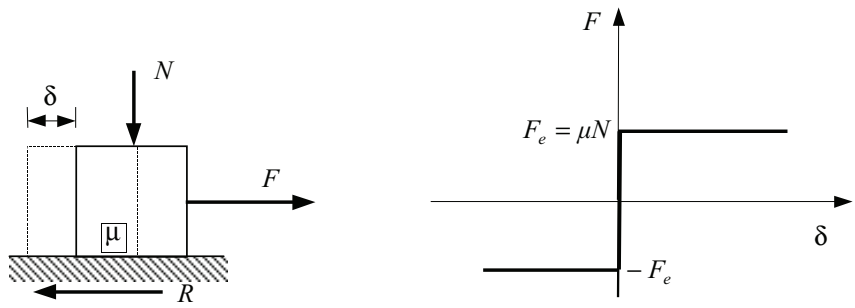
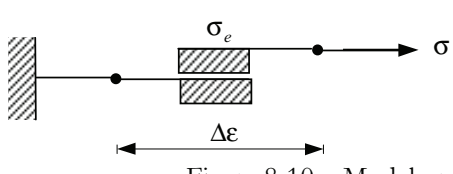


Figura 8-9 – Ley de fricción de Coulomb

El comportamiento del modelo de fricción de Coulomb, en términos de la relación fuerza-desplazamiento $F - \delta$, está representado gráficamente en la Figura 8-9, tanto para valores positivos de la fuerza F (movimiento hacia la derecha) como para valores negativos (movimiento hacia la izquierda).

Por analogía con el modelo mecánico de fricción, podemos definir el modelo reológico de fricción de la Figura 8-10 donde σ es la tensión (análoga a la fuerza F en el modelo de Coulomb) que actúa sobre el dispositivo y ε la deformación que experimenta (análoga al desplazamiento δ). Dicho modelo reológico dispone de un dispositivo friccional caracterizado por un valor límite σ_e (que juega el papel de μN en el modelo de Coulomb) cuyo valor no puede ser excedido.



$$\begin{aligned} |\sigma| < \sigma_e &\rightarrow \Delta\varepsilon = 0 \\ |\sigma| = \sigma_e &\rightarrow \Delta\varepsilon \neq 0 \\ |\sigma| > \sigma_e &\rightarrow \textit{imposible} \end{aligned}$$

Figura 8-10 – Modelo reológico de fricción

En la Figura 8-11 se presenta la curva tensión-deformación correspondiente a dicho modelo reológico para un ciclo carga-descarga-recarga en el mismo, que puede ser descompuesta en los siguientes tramos:

– *Tramo* $\boxed{0-1}$: La tensión σ aumenta (a tracción) hasta alcanzar el valor umbral $\sigma = \sigma_e$. No se produce deformación.

– *Tramo* $\boxed{1-2}$: Una vez alcanzado el umbral $\sigma = \sigma_e$, la tensión no puede aumentar, aunque sí mantenerse constante, con lo que el elemento de fricción *fluye* produciéndose una deformación ε que crece indefinidamente mientras se sostenga la tensión (proceso de *carga*).

– *Tramo* $\boxed{2-3}$: En el punto $\boxed{2}$ se invierte la tendencia de la tensión que empieza a disminuir ($\Delta\sigma < 0$) y se inicia la *descarga* ($\sigma < \sigma_e$). Automáticamente deja de producirse deformación $\Delta\varepsilon = 0$. Esta situación se puede prolongar hasta que la tensión se anula ($\sigma = 0$) en el punto $\boxed{3}$. Obsérvese que si el proceso se detiene aquí, nos encontraremos con que se ha recuperado el estado de tensión inicial pero no el estado de deformación, apareciendo una *deformación residual o permanente* ($\varepsilon \neq 0$) que pone en evidencia que, para este modelo, la trayectoria en la curva tensión-deformación no es la misma en régimen de carga que en régimen de descarga y (desde el punto de vista termodinámico) el carácter irreversible del proceso de deformación.

– *Tramo* $\boxed{3-4}$: Mas allá del punto $\boxed{3}$ el signo de la tensión se invierte y pasa a ser de compresión. Sin embargo, puesto que $|\sigma| < \sigma_e$, no se producen cambios en la deformación ($\Delta\varepsilon = 0$).

– *Tramo* $\boxed{4-5}$: En el punto $\boxed{4}$ se cumple el criterio $|\sigma| = \sigma_e$ y el modelo empieza nuevamente a entrar en carga y a *fluir* a tensión constante $\sigma = -\sigma_e$, produciendo deformación negativa $\Delta\varepsilon < 0$, la cual reduce progresivamente la deformación acumulada. Finalmente, en el punto $\boxed{5}$ se ha recuperado el estado de deformación inicial, pero no el de tensión. Más allá de dicho punto se podría proceder a una descarga, con la consiguiente disminución de la tensión hasta cerrar el ciclo en el punto $\boxed{0}$, o proseguir en régimen de carga generando, ahora, deformación permanente negativa.

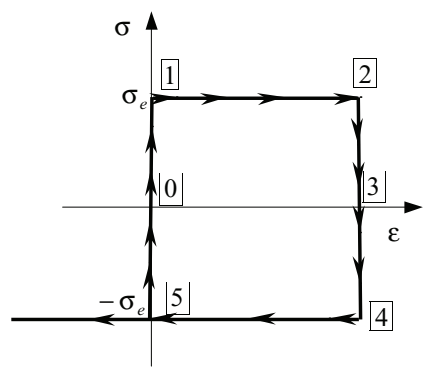


Figura 8-11 – Curva tensión-deformación en un ciclo de carga-descarga-recarga

8.4.3 Modelo elástico-friccional

Los elementos reológicos básicos, elástico y friccional pueden combinarse para producir un modelo mas complejo, que denominaremos *modelo elástico-friccional*, mediante la disposición en serie de un elemento elástico, de parámetro E, y de un elemento de fricción, de parámetro σ_e que denominaremos *límite elástico*, tal como se muestra en la Figura 8-12. Sea σ la tensión que actúa en el modelo y ε la deformación total del mismo. Al estar colocados los dos elementos básicos en serie, se verificará que la tensión que actúa sobre cada uno de ellos

es la misma. Por otro lado, podemos descomponer la deformación total como la suma de la deformación experimentada por el elemento elástico (ε^e) más la deformación experimentada por el dispositivo friccional (ε^f), y lo mismo podrá hacerse a nivel incremental:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma = \sigma^e = \sigma^f \\ \varepsilon = \underbrace{\dfrac{\sigma}{E}}_{\varepsilon^e} + \varepsilon^f = \dfrac{\sigma}{E} + \varepsilon^f \\ \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^f \end{array}\right\} \rightarrow \text{Descomposición aditiva de la deformación} \tag{8.21}$$

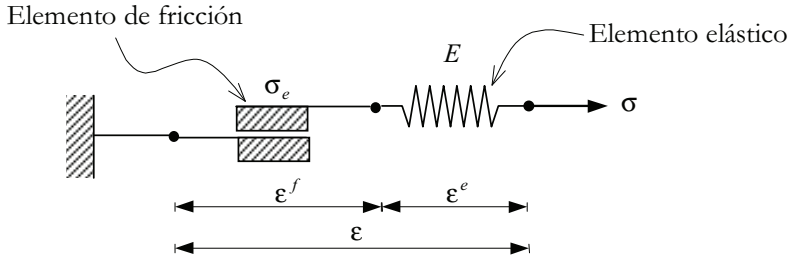


Figura 8-12 – Elemento elástico-friccional

Teniendo en cuenta el comportamiento tensión-deformación de cada uno de los elementos básicos que componen el modelo reológico, para el modelo combinado se tendrá:

- $\boxed{|\sigma| < \sigma_e} \Rightarrow \Delta\varepsilon^f = 0 \Rightarrow \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e \boxed{\Rightarrow \begin{cases} \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e \\ \Delta\sigma = E\Delta\varepsilon \end{cases}}$.

  El elemento de fricción no se deforma para tensiones $|\sigma| < \sigma_e$, por lo *que toda la deformación será absorbida por el elemento elástico.*

- $\boxed{|\sigma| = \sigma_e} \Rightarrow \Delta\varepsilon^f \neq 0 \Rightarrow \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} + \varepsilon^f \boxed{\Rightarrow \begin{cases} |\sigma| = \sigma_e \\ \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^f \Rightarrow \Delta\varepsilon^e = 0 \Rightarrow \Delta\sigma = 0 \end{cases}}$

  Todo incremento de la deformación es absorbido por el elemento de fricción con un incremento de tensión nulo.

- $\boxed{|\sigma| > \sigma_e}$

  Es incompatible con las características del elemento de fricción.

En la Figura 8-13 se presenta la curva tensión-deformación para un ciclo carga-descarga-recarga con el modelo elástico-friccional, que puede ser descompuesto en los siguientes tramos:

– *Tramo* $\boxed{0-1}$: $|\sigma| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon^f = 0 \Rightarrow \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e \rightarrow$ Es un tramo de *carga elástica.* Al final del mismo, en el punto $\boxed{1}$, se tiene $\varepsilon = \varepsilon^e = \dfrac{\sigma_e}{E}$. El valor final σ_e al final de este tramo elástico justifica su denominación como *límite elástico.*

– *Tramo* $\boxed{1-2}$: $|\sigma| = \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon^f \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{\sigma_e}{E} + \varepsilon^f \\ \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^f > 0 \end{cases} \rightarrow$ Es un tramo de *carga friccional* en el que no se genera deformación en el elemento elástico *(no se genera deformación elástica*) y todo el incremento de deformación es absorbido por el elemento friccional.

– *Tramo* $\boxed{2-3}$: $|\sigma| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon^f = 0 \Rightarrow \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e \rightarrow$ Es un tramo de *descarga elástica*. Al final del mismo, en el punto $\boxed{3}$ se recobra el estado inicial de tensión nula ($\sigma = 0$). En consecuencia, en dicho punto la deformación elástica es $\varepsilon^e = \dfrac{\sigma}{E} = 0$ y por tanto la deformación residual o irrecuperable es $\varepsilon = \varepsilon^f \neq 0$; es decir, la deformación generada en el elemento de fricción durante el tramo de carga friccional $\boxed{1-2}$ no se recupera ante una eventual relajación a cero de la tensión. Este hecho permite calificar a *la componente friccional de la deformación* ε^f *como una deformación irrecuperable o irreversible*.

– *Tramo* $\boxed{3-4}$: $|\sigma| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon^f = 0 \Rightarrow \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e \rightarrow$ Es un tramo de *recarga elástica* similar al $\boxed{0-1}$ pero con tensión de compresión ($\sigma < 0$). Durante el mismo no se modifica la componente friccional de la deformación y el valor final, en el punto $\boxed{4}$, de la deformación elástica es $\varepsilon^e = -\dfrac{\sigma_e}{E}$.

– *Tramo* $\boxed{4-5}$: $|\sigma| = \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon^f \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = -\dfrac{\sigma_e}{E} + \varepsilon^f \\ \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^f < 0 \end{cases} \rightarrow$ Es un tramo de *recarga friccional* durante el cual se genera deformación friccional negativa ($\Delta\varepsilon^f < 0$), por lo que el valor total de la deformación de fricción va diminuyendo hasta anularse en el punto $\boxed{5}$ (caracterizado por $\varepsilon = \varepsilon^e = -\dfrac{\sigma_e}{E}$ y $\varepsilon^f = 0$). Una eventual descarga elástica en dicho punto determina la vuelta al estado inicial $\boxed{0}$.

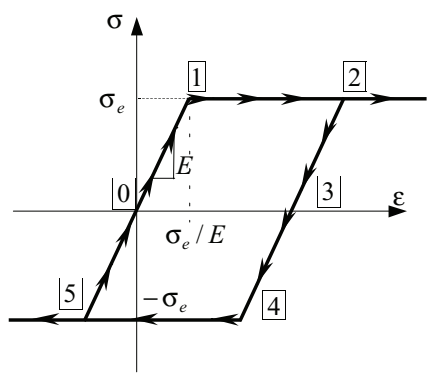


Figura 8-13 Curva tensión-deformación de un modelo elástico-friccional

8.4.4 Modelo de fricción con endurecimiento

Consideremos el modelo reológico de la Figura 8-14 compuesto por un elemento elástico (caracterizado por un parámetro H', que denominaremos *módulo de endurecimiento*) y un elemento de fricción (caracterizado por el *límite*

elástico σ_e) dispuestos en paralelo. La disposición en paralelo motiva que ambos elementos reológicos compartan la deformación, mientras que la tensión total en el modelo será igual a la suma de la tensión sobre el elemento de fricción (σ^1) más la tensión que pasa por el elemento elástico (σ^2):

$$\boxed{\begin{cases}\sigma = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} \\ \Delta\sigma = \Delta\sigma^{(1)} + \Delta\sigma^{(2)} \\ \varepsilon = \varepsilon^e = \varepsilon^f\end{cases}} \tag{8.22}$$

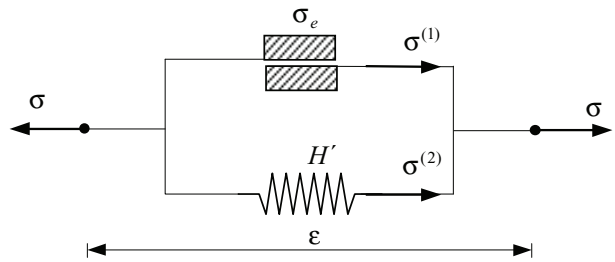


Figura 8-14 – Modelo de fricción con endurecimiento

Analizando por separado el comportamiento de cada elemento se tiene:

a) Elemento de fricción:

$$\boxed{\begin{array}{ll}\left|\sigma^{(1)}\right| < \sigma_e & \Delta\varepsilon^f = \Delta\varepsilon = 0 \\ \left|\sigma^{(1)}\right| = \sigma_e & \Delta\varepsilon^f = \Delta\varepsilon \neq 0 \\ \left|\sigma^{(1)}\right| > \sigma_e & \textit{imposible}\end{array}} \tag{8.23}$$

b) Elemento elástico:

$$\boxed{\begin{cases}\sigma^{(2)} = H'\varepsilon^e = H'\varepsilon \\ \Delta\sigma^{(2)} = H'\Delta\varepsilon^e = H'\Delta\varepsilon\end{cases}} \tag{8.24}$$

c) Combinando las ecuaciones (8.23) y (8.24) se llega a:

$$\left|\sigma^{(1)}\right| = |\sigma - \underbrace{\sigma^{(2)}}_{H'\varepsilon}| = |\sigma - H'\varepsilon| \tag{8.25}$$

De acuerdo con las ecuaciones (8.23) y (8.24) pueden establecerse las siguientes situaciones para el modelo reológico:

- $\left|\sigma^{(1)}\right| < \sigma_e \Leftrightarrow \boxed{|\sigma - H'\varepsilon| < \sigma_e} \Rightarrow \begin{cases}\Delta\varepsilon^f = \Delta\varepsilon = 0 \\ \Delta\sigma^{(2)} = H'\Delta\varepsilon^e = H'\Delta\varepsilon = 0\end{cases} \boxed{\Rightarrow \begin{cases}\Delta\sigma = \Delta\sigma^{(1)} \\ \Delta\varepsilon = 0\end{cases}}$

  Toda la tensión pasa por el dispositivo friccional y la deformación es nula.

- $\left|\sigma^{(1)}\right| = \sigma_e \Leftrightarrow \boxed{|\sigma - H'\varepsilon| = \sigma_e} \Rightarrow \begin{cases}\left|\sigma^{(1)}\right| = \sigma_e \\ \left|\sigma^{(2)}\right| = |\sigma - \sigma^{(1)}|\end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta\sigma^{(2)} = \Delta\sigma = H'\Delta\varepsilon}$

  Todo incremento de tensión es absorbido en su totalidad por el elemento elástico.

En la Figura 8-15 se presenta la curva tensión-deformación para un ciclo carga-descarga-recarga con el modelo propuesto y descompuesta en los siguientes tramos:

– *Tramo* $\boxed{0-1}$: $\left|\sigma^{(1)}\right| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta\sigma^{(2)} = E\Delta\varepsilon = 0 \\ \Delta\sigma^{(1)} = \Delta\sigma \end{cases} \rightarrow$ Es un tramo caracterizado porque toda la tensión es absorbida por el elemento de fricción. Al final del mismo, en el punto $\boxed{1}$, se tiene $\varepsilon = 0$ y $\sigma = \sigma_e$. El tramo puede caracterizarse por la condición $\boxed{\left|\sigma - H'\varepsilon\right| < \sigma_e}$.

– *Tramo* $\boxed{1-2}$: $\left|\sigma^{(1)}\right| = \sigma_e \Rightarrow \begin{cases} \sigma = \sigma_e + \sigma^{(2)} \\ \Delta\sigma = \Delta\sigma^{(2)} = H'\Delta\varepsilon \end{cases} \rightarrow$ Es un tramo de carga en el que todo el incremento de tensión es absorbido por el elemento elástico. Globalmente el modelo aumenta su capacidad de resistir la tensión (y se dice que el modelo *endurece*) proporcionalmente al aumento de deformación, siendo el factor de proporcionalidad el *módulo de endurecimiento* H'. El tramo puede caracterizarse por la condición $\boxed{\left|\sigma - H'\varepsilon\right| = \sigma_e}$.

– *Tramo* $\boxed{2-3}$: $\left|\sigma^{(1)}\right| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta\sigma^{(1)} = \Delta\sigma \\ \Delta\sigma^{(2)} = 0 \end{cases} \rightarrow$ Es un tramo en el que la tensión en el elemento friccional disminuye, con un incremento de deformación nulo y manteniéndose constante la tensión en el elemento elástico. Este estado puede proseguir hasta invertirse totalmente la tensión en el elemento friccional. Así, en el punto $\boxed{3}$ se tiene $\sigma^{(1)} = -\sigma^e$. El tramo puede caracterizarse por la condición $\boxed{\left|\sigma - H'\varepsilon\right| < \sigma_e}$.

– *Tramo* $\boxed{3-4}$: $\left|\underbrace{\sigma^{(1)}}_{-\sigma^e}\right| = \sigma_e \Rightarrow \begin{cases} \sigma = -\sigma_e + \sigma^{(2)} \\ \Delta\sigma = \Delta\sigma^{(2)} = H'\Delta\varepsilon \end{cases} \rightarrow$ La situación es simétrica respecto al tramo $\boxed{1-2}$ con el elemento elástico disminuyendo la tensión que soporta, hasta anularse en el punto $\boxed{3}$, donde $\sigma^{(1)} = -\sigma_e$ y $\sigma^{(2)} = 0$. El tramo puede caracterizarse por la condición $\boxed{\left|\sigma - H'\varepsilon\right| = \sigma_e}$. Más allá de este punto puede relajarse la tensión en el elemento de fricción hasta llegar al estado original $\boxed{0}$.

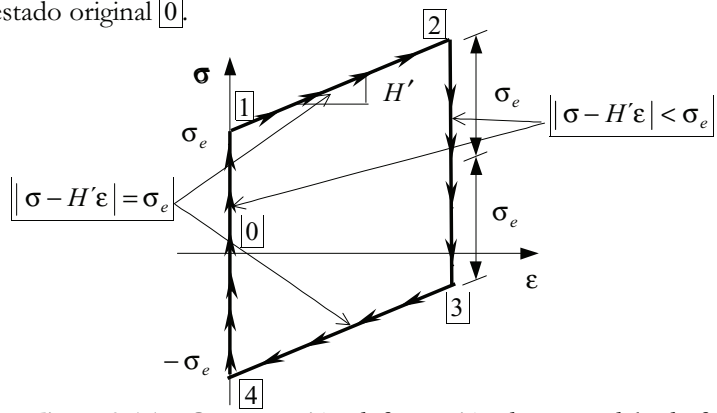


Figura 8-15 – Curva tensión-deformación de un modelo de fricción con endurecimiento

8.4.5 Modelo elástico – friccional con endurecimiento

Combinando ahora un elemento elástico, de módulo elástico E, en serie con el modelo friccional, con endurecimiento H' y límite elástico σ_e, del apartado 8.4.4, se llega al modelo elástico– fricción con endurecimiento de la Figura 8-16.

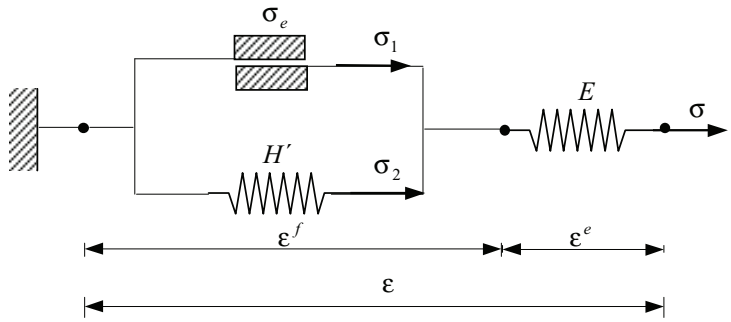


Figura 8-16 – Modelo elástico-friccional con endurecimiento.

De las ecuaciones de equilibrio de tensiones y de compatibilidad de deformaciones en el modelo, (ver Figura 8-16), tendremos:

$$\boxed{\begin{cases}\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^f \\ \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^f\end{cases} \rightarrow \text{Descomposición aditiva de la deformación} \quad \begin{cases}\sigma = \sigma^e = \sigma^f \\ \Delta\sigma = \Delta\sigma^e = \Delta\sigma^f\end{cases}} \tag{8.26}$$

donde σ^e y σ^f representan, respectivamente, las tensiones soportadas por el elemento elástico y el modelo de fricción con endurecimiento. Combinando ahora el comportamiento de un elemento elástico (ver Figura 8-8) con el del modelo de fricción con endurecimiento de la Figura 8-14, se tiene para el modelo reológico propuesto:

- $\boxed{\left|\sigma - H'\varepsilon_f\right| < \sigma_e} \Rightarrow \begin{cases}\Delta\varepsilon^f = 0 \\ \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e\end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta\sigma = E\,\Delta\varepsilon}$

  El elemento de fricción con endurecimiento no se deforma y el incremento de deformación $\Delta\varepsilon$ es absorbido en su totalidad por el elemento elástico. Se tiene un caso que denominaremos *proceso elástico.*

- $\boxed{\left|\sigma - H'\varepsilon_f\right| = \sigma_e}$

  a) $\boxed{\sigma\cdot\Delta\sigma > 0} \Leftrightarrow \begin{cases}\sigma > 0\ ;\ \Delta\sigma > 0 \\ \quad ó \\ \sigma < 0\ ;\ \Delta\sigma < 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\Delta\sigma = \Delta\sigma^f = H'\Delta\varepsilon^f \\ \Delta\sigma = \Delta\sigma^e = E\ \Delta\varepsilon^e\end{cases} \Rightarrow$

  $$\Rightarrow \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^f = \frac{1}{E}\Delta\sigma + \frac{1}{H'}\Delta\sigma = \frac{E+H'}{EH'}\Delta\sigma \Rightarrow \boxed{\begin{cases}\Delta\sigma = E^{ef}\Delta\varepsilon \\ E^{ef} = E\dfrac{H'}{E+H'}\end{cases}}$$

  El incremento de deformación es absorbido por los dos elementos del modelo (el friccional-endurecible y el elástico). La relación entre el

incremento de tensión $\Delta\sigma$ y el incremento de deformación $\Delta\varepsilon$ viene dada por el *módulo de deformación elástico-friccional* E^{ef}. Se trata de un caso que denominaremos *proceso de carga inelástica.*

b) $\boxed{\sigma\cdot\Delta\sigma<0}\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma>0\ ;\ \Delta\sigma<0\\ \quad ó\\ \sigma<0\ ;\ \Delta\sigma<0\end{cases}\Rightarrow\Delta\varepsilon^{f}=0\Rightarrow\Delta\varepsilon=\Delta\varepsilon^{e}\Rightarrow\boxed{\Delta\sigma=E\ \Delta\varepsilon}$

Todo el incremento de deformación $\Delta\varepsilon$ es absorbido por el elemento elástico. Se trata de un caso que denominaremos proceso de *descarga elástica.*

En la Figura 8-17 se presenta la curva tensión deformación en la que pueden distinguirse los siguientes tramos:

– *Tramos* $\boxed{0-1}$ y $\boxed{2-3}$: $\left|\sigma-H'\varepsilon_{f}\right|<\sigma_{e}\ \Rightarrow\boxed{\Delta\sigma=E\,\Delta\varepsilon}$. Corresponden a *procesos elásticos.*

– *Tramos* $\boxed{1-2}$ y $\boxed{3-4}$: $\begin{cases}\left|\sigma-H'\varepsilon_{f}\right|=\sigma_{e}\\ \sigma\,\Delta\sigma>0\end{cases}\Rightarrow\ \boxed{\Delta\sigma=E^{ef}\,\Delta\varepsilon}$. Corresponden a *procesos de carga inelástica.*

– *Punto* $\boxed{2}$: $\begin{cases}\left|\sigma-H'\varepsilon_{f}\right|=\sigma_{e}\\ \sigma\,\Delta\sigma<0\end{cases}\Rightarrow\boxed{\Delta\sigma=E\,\Delta\varepsilon}$. Corresponde a un *proceso de descarga elástica.*

Nótese que si $H'=0$, entonces $E^{ef}=0$, y se recupera el modelo elástico-friccional de la Figura 8-13.

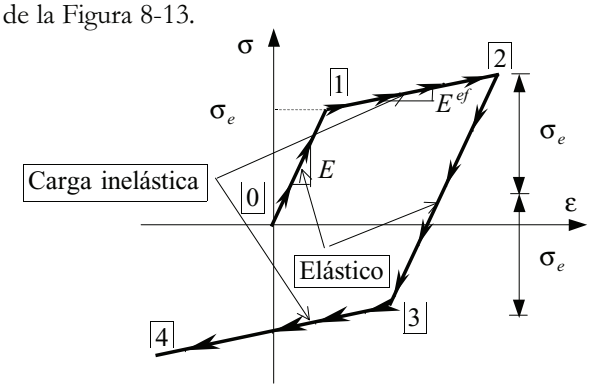


Figura 8-17 – Curva tensión-deformación de un modelo elástico-friccional con endurecimiento

8.5 Comportamiento fenomenológico elasto-plástico

Consideremos una barra de acero de longitud ℓ y sección A sometida a una fuerza de tracción F en sus extremos. La tensión en la barra será $\sigma = F / A$ (ver Figura 8-18) y la deformación de la misma puede ser estimada como $\varepsilon = \dfrac{\delta}{\ell}$, donde δ es el alargamiento de la barra. Sometiendo a dicha pieza a varios ciclos de carga y descarga se obtiene, típicamente, una respuesta, en términos de la curva tensión-deformación $\sigma - \varepsilon$, como la indicada en la Figura 8-19.

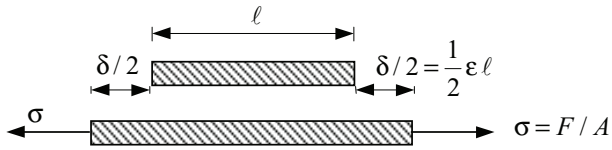


Figura 8-18 – Ensayo de tracción uniaxial

Analizando el primer ciclo se observa que, mientras la tensión no supera el valor σ_e (denominado *límite elástico*) en el punto 1, el comportamiento es elástico lineal caracterizado por el módulo elástico E ($\sigma = E\varepsilon$) y no existen deformaciones irrecuperables (durante una eventual descarga se recupera la deformación producida durante la carga).

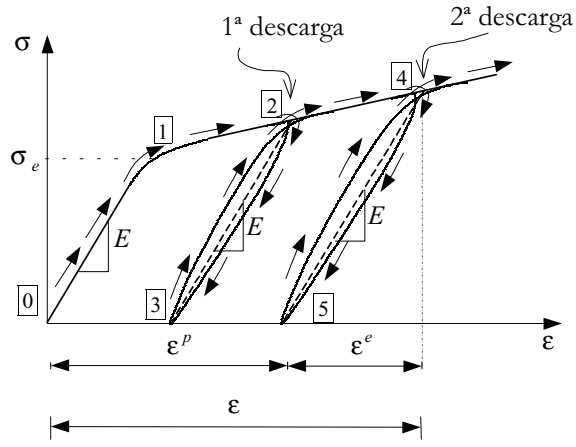


Figura 8-19 – Ciclos carga-descarga-recarga

Para tensiones superiores a σ_e, el comportamiento deja de ser elástico y parte de la deformación no se recupera ante una eventual reducción a cero de la tensión (punto 3), apareciendo una deformación remanente denominada *deformación plástica* ε^p. Sin embargo, durante la rama de descarga 2 – 3 el comportamiento vuelve a ser, al menos de forma aproximada, incrementalmente elástico ($\Delta\sigma = E\,\Delta\varepsilon$). Lo mismo ocurre en la posterior recarga 3 – 2, produciéndose un comportamiento incrementalmente elástico, hasta que la tensión alcanza, en el punto 2, el máximo valor que había alcanzado durante el proceso de carga. A partir de este punto el comportamiento deja de nuevo de ser incrementalmente elástico (como si el material *recordase* la máxima tensión a la cual había estado sometido

previamente). Un siguiente ciclo carga-descarga-recarga $\boxed{2-4-5-4}$ pone de nuevo de manifiesto que durante el tramo $\boxed{2-4}$ se ha generado más deformación plástica, que aparece en forma de deformación permanente en el punto $\boxed{5}$, y también más *deformación elástica* ε^e, entendida como aquella parte de la deformación que sí se recupera durante el tramo de descarga $\boxed{4-5}$.

8.5.1 Efecto Bauschinger

Consideremos una probeta de un material virgen (que no ha sufrido previamente estados de deformación inelásticos) sometida a un ensayo de *tracción* uniaxial y otra probeta del mismo material virgen sometida a un ensayo de *compresión* uniaxial. Para ciertos materiales (denominados isorresistentes) las respuestas que se obtienen en ambos ensayos, en términos de la curva tensión-deformación $\sigma-\varepsilon$ de la Figura 8-20, son simétricas respecto al origen. Es decir, que en el ensayo a tracción la respuesta es elástica hasta un valor de $\sigma=\sigma_e$ (*límite elástico a tracción*) y en el ensayo a compresión la respuesta es también elástica hasta un valor de $\sigma=-\sigma_e$ (*límite elástico a compresión*), siendo el resto de ambas curvas (para un supuesto régimen de carga monótono) también simétricas. Diremos en este caso que la curva tensión-deformación del material virgen es simétrica a tracción y compresión.

NOTA

Este procedimiento se conoce como *estiramiento en frío* y tiene como fin obtener un límite elástico aparente del material superior al del material virgen $\sigma_f>\sigma_e$.

Supongamos ahora que realizamos un ensayo de compresión sobre una probeta que ha estado *previamente sometida a una historia de deformaciones* plásticas, por ejemplo a un ciclo de carga-descarga a tracción como el $\boxed{0-1-2-3}$ en la Figura 8-19 (estiramiento en frío), y sea $\sigma_f>\sigma_e$ la máxima tensión a la que ha estado sometido el material durante el proceso de carga. Un hipotético comportamiento *simétrico* llevaría a que el material tuviera ahora un comportamiento elástico en el rango de tensiones $\left[-\sigma^f,\sigma^f\right]$. Sin embargo, en ciertos casos, el comportamiento elástico a compresión termina mucho antes (ver Figura 8-20). Este es el efecto conocido como *efecto Bauschinger* o *endurecimiento cinemático*. Obsérvese que la curva tensión-deformación del modelo elástico-friccional de la Figura 8-17 exhibe éste tipo de endurecimiento.

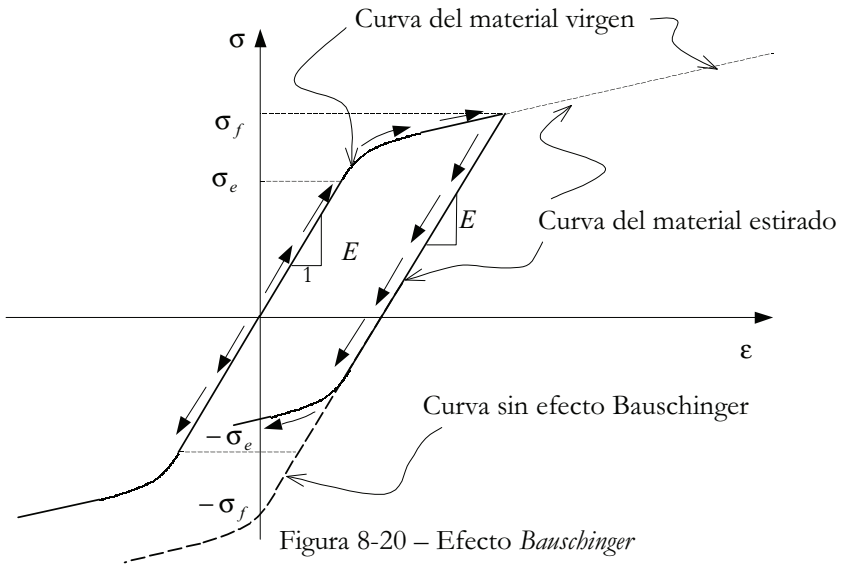


Figura 8-20 – Efecto *Bauschinger*

Observación 8-8

A la vista del comportamiento fenomenológico observado en la Figura 8-19 y en la Figura 8-20, el comportamiento elastoplástico se caracteriza por los siguientes hechos:

1) A diferencia del caso elástico, no existe unicidad en la relación tensión-deformación. Un mismo valor de la deformación puede corresponder a infinitos valores de la tensión y viceversa. El valor de la tensión depende, además de la deformación, de la historia de carga.
2) No hay una relación lineal entre la tensión y la deformación. A lo sumo esta linealidad puede ser incremental en ciertos tramos del proceso de deformación.
3) Se producen deformaciones irrecuperables o irreversibles en un ciclo carga-descarga.

8.6 Teoría incremental de la plasticidad en una dimensión

NOTA

Hasta cierto punto, dichos modelos pueden inspirarse, aunque con ciertas limitaciones, en modelos reológicos del típico elastico-friccional como los presentados en el apartado 8.4 .

El comportamiento elastoplástico analizado en al apartado 8.5 puede ser modelado utilizando modelos matemáticos de cierta complejidad. Una de las aproximaciones más populares la constituye la denominada Teoría Incremental de la Plasticidad. Para el caso de una dimensión se pretende, en esencia, aproximar un comportamiento tensión-deformación como el de la Figura 8-19 mediante aproximaciones a trozos mediante ramas elásticas e inelásticas como las de la Figura 8-21. La generalización a varias dimensiones requiere la introducción de conceptos más abstractos.

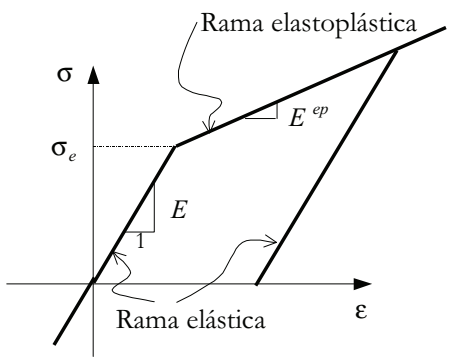


Figura 8-21 – Curva uniaxial tensión-deformación para un modelo elastoplástico

8.6.1 Descomposición aditiva de la deformación. Variable de endurecimiento

Se descompone la deformación total ε en la suma de una deformación elástica ε^e (o deformación recuperable), que se rige por la ley de Hooke, y una deformación plástica ε^p (o deformación irrecuperable):

$$\text{Descomposición aditiva de la deformación} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \\ \varepsilon^e = \dfrac{\sigma}{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \\ d\varepsilon^e = \dfrac{d\sigma}{E} \end{cases} \tag{8.27}$$

donde E es el módulo elástico. Se define además la variable de endurecimiento $\alpha(\sigma, \varepsilon^p)$ mediante la ecuación de evolución:

NOTA

Se utiliza aquí la función signo definida mediante:

$x \geq 0 \Leftrightarrow sign(x) = +1$

$x < 0 \Leftrightarrow sign(x) = -1$

$$\text{Variable de endurecimiento } \alpha \rightarrow \begin{cases} d\alpha = sign(\sigma)\, d\varepsilon^p \\ d\alpha \geq 0 \\ \alpha|_{\varepsilon^p = 0} = 0 \end{cases} \tag{8.28}$$

Observación 8-9

Nótese que la variable de endurecimiento α es siempre positiva, de acuerdo con su definición en la ecuación (8.28) y que, tomando módulos en la expresión $d\alpha = sign(\sigma)\, d\varepsilon^p$, se llega a:

$$d\alpha = |d\alpha| = \underbrace{|sign(\sigma)|}_{=1} |d\varepsilon^p| \Rightarrow \boxed{d\alpha = |d\varepsilon^p|}$$

Luego, para un proceso monótono creciente de la deformación plástica ambas variables coinciden:

$$d\varepsilon^p \geq 0 \Rightarrow \alpha = \int_0^{\varepsilon^p} |d\varepsilon^p| = \int_0^{\varepsilon^p} d\varepsilon^p = \varepsilon^p$$

Sin embargo, si el proceso no es monótono creciente la deformación plástica puede disminuir y su valor ya no coincide con el de la variable de endurecimiento α.

8.6.2 Dominio elástico. Función de fluencia. Superficie de fluencia

Se define como *dominio elástico en el espacio de tensiones* al interior del dominio encerrado por la superficie $F(\sigma, \alpha) = 0$:

$$\text{Dominio elástico} \rightarrow \mathbb{E}_\sigma := \{\sigma \in \mathbb{R} \mid F(\sigma, \alpha) < 0\} \tag{8.29}$$

donde a la función $F(\sigma, \alpha): \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ se la denomina *función de fluencia plástica.*

Se define como *dominio elástico inicial* $\mathbb{E}_\sigma^0$ al dominio elástico correspondiente a una deformación plástica nula ($\varepsilon^p = \alpha = 0$):

$$\text{Dominio elástico inicial} \rightarrow \mathbb{E}_\sigma^0 := \{\sigma \in \mathbb{R} \mid F(\sigma, 0) < 0\} \tag{8.30}$$

Un requerimiento adicional al dominio elástico inicial es que contenga al estado de tensión nula:

$$0 \in \mathbb{E}_\sigma^0 \Rightarrow F(0,0) < 0 \tag{8.31}$$

y ello se consigue definiendo la función de fluencia plástica mediante:

$$\boxed{\text{Función de fluencia plástica} \rightarrow F(\sigma,\alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha)} \tag{8.32}$$

donde $\sigma_f(\alpha) > 0$ es la denominada *tensión de fluencia*. El valor inicial (para $\alpha = 0$) de la tensión de fluencia es el límite elástico σ_e (ver Figura 8-22). A la función $\sigma_f(\alpha): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ se la denomina *ley de endurecimiento*.

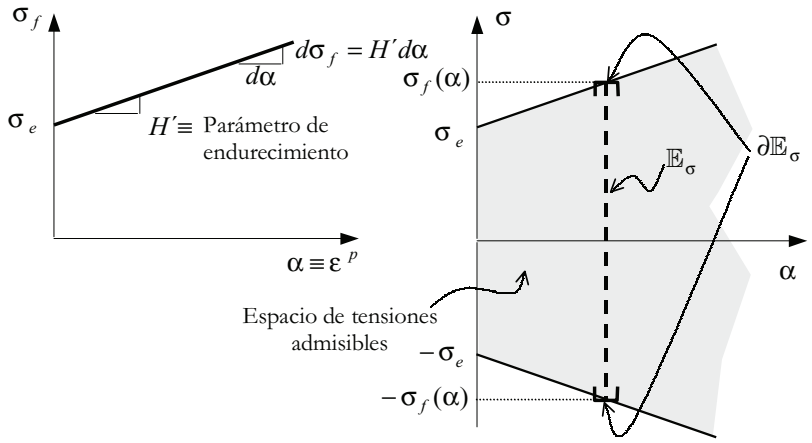


Figura 8-22. Ley de endurecimiento y espacio de tensiones admisibles

Se define la *superficie de fluencia* como el contorno del dominio elástico:

$$\boxed{\text{Superficie de fluencia} \rightarrow \partial\mathbb{E}_\sigma := \{\sigma \in \mathbb{R} \mid F(\sigma,\alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) = 0\}} \tag{8.33}$$

El dominio elástico $\mathbb{E}_\sigma$ junto con su contorno $\partial\mathbb{E}_\sigma$ determinan el espacio (dominio) de tensiones admisibles $\overline{\mathbb{E}}_\sigma$:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{Espacio de}\\ \text{tensiones}\\ \text{admisibles}\end{array}\right\} \rightarrow \overline{\mathbb{E}}_\sigma = \mathbb{E}_\sigma \cup \partial\mathbb{E}_\sigma = \{\sigma \in \mathbb{R} \mid \; F(\sigma,\alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) \leq 0\}} \tag{8.34}$$

y se *postula* que todo estado tensional factible (admisible) debe pertenecer al espacio de tensiones admisibles $\overline{\mathbb{E}}_\sigma$. De acuerdo con las definiciones del dominio elástico en (8.29), de la superficie de fluencia (8.33) y del espacio de tensiones admisibles (8.34), puede establecerse lo siguiente:

$$\begin{array}{lll} F(\sigma,\alpha) < 0 \Leftrightarrow |\sigma| < \sigma_f(\alpha) & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l}\sigma \text{ en el dominio elástico}\\ (\sigma \in \mathbb{E}_\sigma)\end{array}\right. \\ F(\sigma,\alpha) = 0 \Leftrightarrow |\sigma| = \sigma_f(\alpha) & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l}\sigma \text{ en la superf. de fluencia}\\ (\sigma \in \partial\mathbb{E}_\sigma)\end{array}\right. \\ F(\sigma,\alpha) > 0 \Leftrightarrow |\sigma| > \sigma_f(\alpha) & \Leftrightarrow & \text{estado tensional no admisible} \end{array} \tag{8.35}$$

Observación 8-10

Nótese en la ecuación (8.34) la dependencia del espacio de tensiones admisibles con la variable de endurecimiento α. El dominio admisible evoluciona con la tensión de fluencia $\sigma_f(\alpha)$ de la forma:

$$\overline{\mathbb{E}}_\sigma \equiv \left[-\sigma_f(\alpha),\, \sigma_f(\alpha)\right] \text{ (ver Figura 8-22).}$$

8.6.3 Ecuación constitutiva

Para caracterizar la respuesta del material se definen las siguientes situaciones:

- *Régimen elástico*:

$$\sigma \in \mathbb{E}_\sigma \Rightarrow \boxed{d\sigma = E\, d\varepsilon} \tag{8.36}$$

- *Régimen elastoplástico en descarga*:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma \in \partial\mathbb{E}_\sigma \\ dF(\sigma,\alpha) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{d\sigma = E\, d\varepsilon} \tag{8.37}$$

- *Régimen elastoplástico en carga plástica*:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma \in \partial\mathbb{E}_\sigma \\ dF(\sigma,\alpha) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{d\sigma = E^{ep}\, d\varepsilon} \tag{8.38}$$

donde E^{ep} es el denominado *módulo de deformación elastoplástico*.

Observación 8-11

La situación $\sigma \in \partial\mathbb{E}_\sigma$ y $dF(\sigma,\alpha) > 0$ no puede darse, puesto que si $\sigma \in \partial\mathbb{E}_\sigma \Rightarrow$ (de la ecuación (8.33)) $F(\sigma,\alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) = 0$.

Si además $dF(\sigma,\alpha) > 0 \Rightarrow$

$$F(\sigma + d\sigma, \alpha + d\alpha) = \underbrace{F(\sigma,\alpha)}_{=0} + \underbrace{dF(\sigma,\alpha)}_{>0} > 0$$

y, de acuerdo con la ecuación (8.35) el estado tensional $\sigma + d\sigma$ sería no admisible.

8.6.4 Ley de endurecimiento. Parámetro de endurecimiento

La ley de endurecimiento proporciona la evolución de la tensión de fluencia plástica $\sigma_f(\alpha)$ con el parámetro de endurecimiento α (ver Figura 8-22). Aunque dicha ley de endurecimiento puede ser mas general, es frecuente (y muchas veces suficiente) considerar una ley de endurecimiento *lineal* del tipo:

$$\sigma_f = \sigma_e + H'\alpha \;\Rightarrow\; \boxed{d\,\sigma_f(\alpha) = H'\, d\,\alpha} \tag{8.39}$$

donde H' recibe el nombre de *parámetro de endurecimiento*.

8.6.5 Módulo de deformación elastoplástico

El valor del módulo de deformación elastoplástico E^{ep} de la ecuación (8.38) puede calcularse como sigue. Considerando el régimen elastoplástico en carga plástica, de la ecuación (8.38):

NOTA

Se utiliza aquí la propiedad:

$$\frac{d|x|}{dx} = sign(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma \in \partial\mathbb{E}_\sigma \Rightarrow F(\sigma,\alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) = 0 \\ dF(\sigma,\alpha) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$d|\sigma| - d\sigma_f(\alpha) = 0 \Rightarrow sign(\sigma)\, d\sigma - H'\, d\alpha = 0 \tag{8.40}$$

donde se ha tenido en cuenta la ecuación (8.39). Considerando ahora la ecuación (8.28) ($d\alpha = sign(\sigma)\, d\varepsilon^p$) y substituyendo en la ecuación (8.40):

$$sign(\sigma)\, d\sigma - H'\, sign(\sigma)\, d\varepsilon^p = 0 \Rightarrow \qquad \boxed{d\varepsilon^p = \frac{1}{H'} d\sigma} \tag{8.41}$$

Considerando ahora la descomposición aditiva de la deformación (8.27) y la ecuación (8.41):

$$\left.\begin{array}{l} d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \\ d\varepsilon^e = \dfrac{1}{E} d\sigma \\ d\varepsilon^p = \dfrac{1}{H'} d\sigma \end{array}\right\} \Rightarrow d\varepsilon = \frac{1}{E} d\sigma + \frac{1}{H'} d\sigma = \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{H'}\right] d\sigma \Rightarrow \tag{8.42}$$

$$d\sigma = \frac{1}{\dfrac{1}{E} + \dfrac{1}{H'}} d\varepsilon \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} d\sigma = E^{ep}\, d\varepsilon \\ E^{ep} = E \dfrac{H'}{E + H'} \end{cases}}$$

8.6.6 Curva tensión-deformación uniaxial

Con la ecuación constitutiva definida por las ecuaciones (8.36) a (8.38), podemos obtener la correspondiente curva tensión-deformación para un proceso uniaxial de carga-descarga-recarga (ver Figura 8-22) en el que podemos observar los siguientes tramos:

- *Tramo* $\boxed{0-1}$: $|\sigma| < \sigma_e \Rightarrow \sigma \in \mathbb{E}_\sigma \Rightarrow$ *Régimen elástico*. De acuerdo con la ecuación (8.36), $d\sigma = E\, d\varepsilon$ y el comportamiento es elástico-lineal definiendo una rama elástica del diagrama tensión-deformación.

- *Tramo* $\boxed{1-2-4}$: $\left.\begin{array}{l} F(\sigma,\alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) = 0 \Rightarrow \sigma \in \partial\mathbb{E}_\sigma \\ dF(\sigma,\alpha) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ *Régimen elastoplástico en carga plástica*. De acuerdo con la ecuación (8.38), $d\sigma = E^{ep}\, d\varepsilon$ definiendo una rama elastoplástica.

- *Tramo* $\boxed{2-3-2}$: $F(\sigma,\alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) < 0 \Rightarrow \sigma \in \mathbb{E}_\sigma \Rightarrow$ *Régimen elástico*.

De acuerdo con la ecuación (8.36), $d\sigma = E\, d\varepsilon$ y el comportamiento es elástico-lineal definiendo una rama elástica.

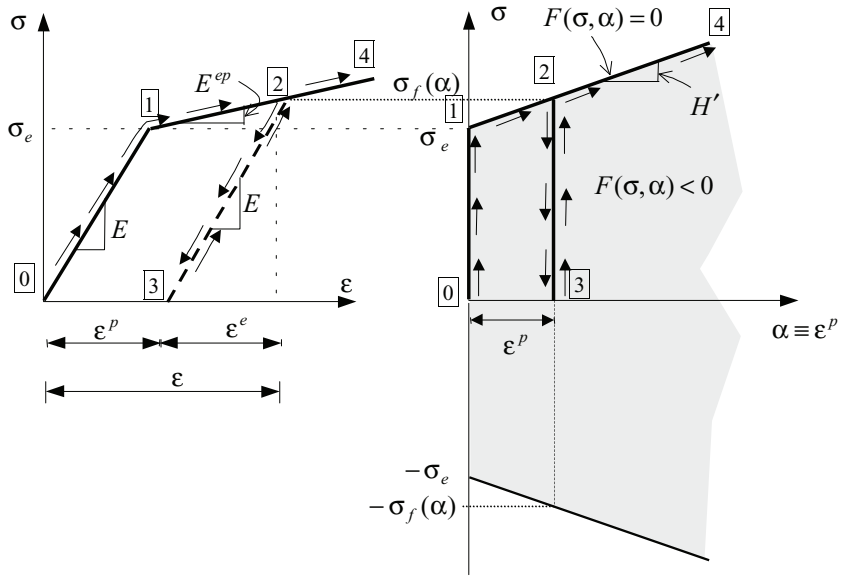


Figura 8-23 – Diagrama tensión-deformación uniaxial correspondiente a la teoría incremental de la plasticidad

Observación 8-12

En el punto $\boxed{2}$ de la Figura 8-23 pueden diferenciarse los siguientes dos procesos:

$\begin{cases} F(\sigma,\alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) = 0 \Rightarrow \sigma \in \partial\mathbb{E}_\sigma \\ dF(\sigma,\alpha) < 0 \Rightarrow \end{cases}$ → Descarga elástica por la rama $\boxed{2-3}$.

$\begin{cases} F(\sigma,\alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) = 0 \Rightarrow \sigma \in \partial\mathbb{E}_\sigma \\ dF(\sigma,\alpha) = 0 \end{cases}$ → Carga plástica por la rama $\boxed{2-4}$.

Observación 8-13

Nótese que sólo se genera deformación plástica durante el proceso de carga plástica sobre la rama elastoplástica (ver Figura 8-24).

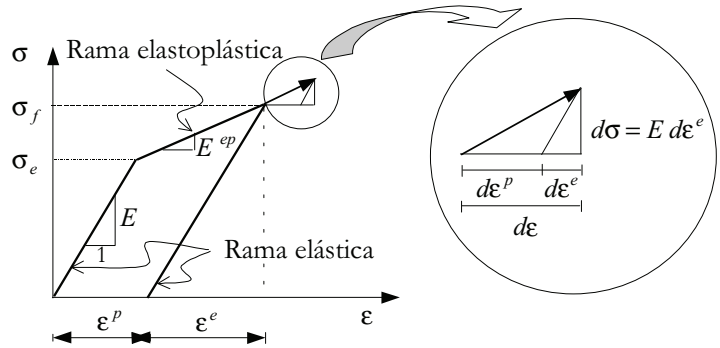


Figura 8-24. Generación de deformación plástica en la rama elastoplástica

Observación 8-14

Nótese la similitud del diagrama tensión deformación de la Figura 8-23 con el obtenido con el modelo reológico elástico-friccional con endurecimiento en el apartado 8.4.5 (Figura 8-17). La deformación de fricción ε^f en dicho modelo es equivalente a la deformación plástica ε^p en la teoría incremental de la plasticidad.

N O T A

El caso de plasticidad con ablandamiento por deformación presenta una problemática específica, respecto a la unicidad de la solución del problema elastoplástico, que queda fuera del alcance de este texto.

Observación 8-15

El parámetro de endurecimiento H' juega un papel fundamental en la definición de la pendiente E^{ep} de la rama elastoplástica. De acuerdo con la ecuación (8.42):

$$E^{ep} = E\frac{H'}{E+H'}$$

y, en función del valor de H', pueden definirse las siguientes situaciones (ver Figura 8-25):

$H' > 0 \Rightarrow E^{ep} > 0 \rightarrow$ *Plasticidad con endurecimiento por deformación.* El caso límite $H' = \infty \Rightarrow E^{ep} = E$ recobra el comportamiento elástico lineal.

$H' = 0 \Rightarrow E^{ep} = 0 \rightarrow$ *Plasticidad perfecta.*

$H' < 0 \Rightarrow E^{ep} < 0 \rightarrow$ *Plasticidad con ablandamiento por deformación.* El caso límite se encuentra en $H' = -E \Rightarrow E^{ep} = -\infty$.

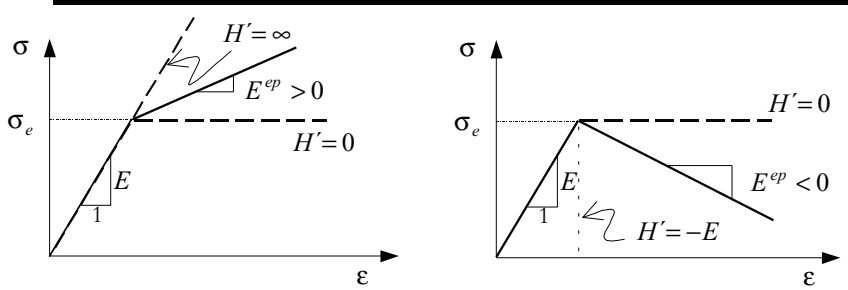


Figura 8-25

8.7 Plasticidad en tres dimensiones

La teoría incremental de la plasticidad, planteada en una dimensión en el apartado 8.6 , puede generalizarse al caso de un estado tensional multiaxial (tres dimensiones) utilizando los mismos ingredientes, es decir:

1. *Descomposición aditiva de la deformación*:

$$\boxed{\text{Descomposición aditiva de la deformación} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \\ \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p \\ d\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbb{C}^{-1} : d\boldsymbol{\sigma} \end{cases}} \tag{8.43}$$

donde $\mathbb{C}^{-1}$ es ahora el tensor de propiedades elásticas definido en el capítulo 6.

2. *Variable de endurecimiento* α *y regla de flujo* (ecuaciones de evolución):

$$\boxed{\text{Regla de flujo} \rightarrow \begin{cases} d\varepsilon^p = \lambda \dfrac{\partial G(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ d\alpha = \lambda \quad \alpha \in [0, \infty) \end{cases}} \tag{8.44}$$

donde λ recibe el nombre de *multiplicador plástico* y $G(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)$ el *de función de potencial plástico.*

3. *Función de fluencia. Dominio elástico y superficie de fluencia.*

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Función de fluencia plástica} & \rightarrow \begin{cases} F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \equiv \phi(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_f(\alpha) \\ \sigma_f(\alpha) = \sigma_e + H' \alpha \ (\textit{ley de endurecimiento}) \end{cases} \\ \text{Dominio elástico} & \rightarrow \mathbb{E}_\sigma := \{\boldsymbol{\sigma} \mid F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) < 0\} \\ \text{Dominio elástico inicial} & \rightarrow \mathbb{E}_\sigma^0 := \{\boldsymbol{\sigma} \mid F(\boldsymbol{\sigma}, 0) < 0\} \\ \text{Superficie de fluencia} & \rightarrow \partial\mathbb{E}_\sigma := \{\boldsymbol{\sigma} \mid F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0\} \\ \left.\begin{array}{l}\text{Espacio de tensiones} \\ \text{admisibles}\end{array}\right\} & \rightarrow \overline{\mathbb{E}}_\sigma = \mathbb{E}_\sigma \cup \partial\mathbb{E}_\sigma = \{\boldsymbol{\sigma} \mid F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \leq 0\} \end{array}} \tag{8.45}$$

donde $\phi(\boldsymbol{\sigma}) \geq 0$ recibe el nombre de *tensión uniaxial equivalente*, σ_e es el límite elástico obtenido en un ensayo uniaxial del material (una propiedad del mismo) y $\sigma_f(\alpha)$ es la tensión de fluencia. El parámetro de endurecimiento H' juega el mismo papel que en el caso uniaxial y determina la expansión o contracción del dominio elástico $\mathbb{E}_\sigma$, en el espacio de tensiones, a medida que crece α. En consecuencia:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ H' > 0 \Rightarrow \text{Expansión de } \mathbb{E}_\sigma \text{ con } \alpha \rightarrow \text{Plasticidad con endurecimiento} \\ \bullet\ H' < 0 \Rightarrow \text{Contracción de } \mathbb{E}_\sigma \text{ con } \alpha \rightarrow \text{Plasticidad con ablandamiento} \\ \bullet\ H' = 0 \Rightarrow \text{Dominio elástico constante } (\mathbb{E}_\sigma = \mathbb{E}_\sigma^0) \rightarrow \text{Plasticidad perfecta} \end{array}} \tag{8.46}$$

4. *Condiciones de carga-descarga* (condiciones de Kuhn-Tucker) *y de consistencia*:

$$\boxed{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Condiciones de}\\ \text{carga - descarga}\end{array}\right\}\rightarrow \lambda\geq 0 \quad ; \quad F(\boldsymbol{\sigma},\alpha)\leq 0 \quad ; \quad \lambda F(\boldsymbol{\sigma},\alpha)=0\\ \left.\begin{array}{l}\text{Condición de}\\ \text{consistencia}\end{array}\right\}\rightarrow F(\boldsymbol{\sigma},\alpha)=0 \Rightarrow \ \lambda\cdot dF(\boldsymbol{\sigma},\alpha)=0\end{array}} \tag{8.47}$$

Las condiciones de carga-descarga y de consistencia son un ingrediente adicional, respecto al caso unidimensional, que permiten obtener, tras alguna manipulación algebraica adicional, el multiplicador plástico λ en la ecuación (8.44).

8.7.1 Ecuación constitutiva

De forma similar al caso uniaxial, la ecuación constitutiva distingue entre las siguientes situaciones:

- *Régimen elástico*:

$$\boldsymbol{\sigma}\in \mathbb{E}_{\sigma} \Rightarrow \ \boxed{d\boldsymbol{\sigma}=\mathbb{C}:d\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{8.48}$$

- *Régimen elastoplástico en descarga*:

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{\sigma}\in \partial\mathbb{E}_{\sigma}\\ dF(\boldsymbol{\sigma},\alpha)<0\end{array}\right\}\Rightarrow \ \boxed{d\boldsymbol{\sigma}=\mathbb{C}:d\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{8.49}$$

- *Régimen elastoplástico en carga plástica*:

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{\sigma}\in \partial\mathbb{E}_{\sigma}\\ dF(\boldsymbol{\sigma},\alpha)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \ \boxed{d\boldsymbol{\sigma}=\mathbb{C}^{ep}:d\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{8.50}$$

donde $\mathbb{C}^{ep}$ es el denominado *tensor constitutivo elastoplástico* que, tras algunas operaciones algebraicas teniendo en cuenta las ecuaciones (8.43) a (8.47), se escribe:

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{C}^{ep}(\boldsymbol{\sigma},\alpha)=\mathbb{C}-\dfrac{\mathbb{C}:\dfrac{\partial G}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\otimes\dfrac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\mathbb{C}}{H'+\dfrac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\mathbb{C}:\dfrac{\partial G}{\partial\boldsymbol{\sigma}}}\\ \\ \mathbb{C}^{ep}_{ijkl}=\mathbb{C}_{ijkl}-\dfrac{\mathbb{C}_{ijpq}\dfrac{\partial G}{\partial\sigma_{pq}}\dfrac{\partial F}{\partial\sigma_{rs}}\mathbb{C}_{rskl}}{H'+\dfrac{\partial F}{\partial\sigma_{pq}}\mathbb{C}_{pqrs}\dfrac{\partial G}{\partial\sigma_{rs}}} \quad i,j,k,l,p,q,r,s\in\{1,2,3\}\end{array}} \tag{8.51}$$

8.8 Superficies de fluencia. Criterios de fallo

Un ingrediente fundamental de la teoría de la plasticidad es la existencia de un dominio elástico inicial $\mathbb{E}^0_{\sigma}$ (ver Figura 8-26) que puede escribirse de la forma:

$$\mathbb{E}_\sigma^0 := \{\boldsymbol{\sigma} \mid \ F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \phi(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_e < 0\} \tag{8.52}$$

y que determina un dominio en el espacio de tensiones delimitado por la superficie de fluencia inicial $\partial\mathbb{E}_\sigma^0$:

$$\partial\mathbb{E}_\sigma^0 := \{\boldsymbol{\sigma} \mid \ F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \phi(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_e = 0\} \tag{8.53}$$

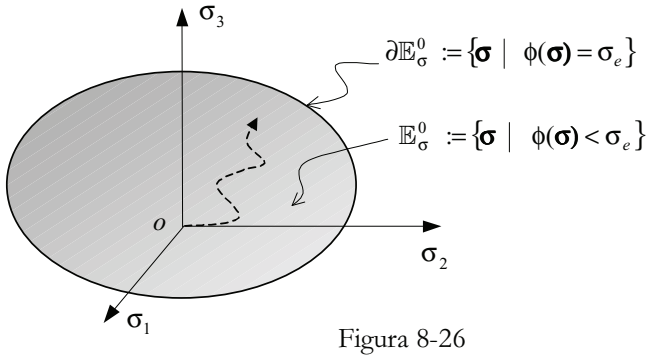


Figura 8-26

Puesto que el dominio elástico inicial contiene el origen del espacio de tensiones $(\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0})$, todo proceso de carga en cualquier punto del medio incluirá un régimen elástico (mientras la trayectoria de tensiones permanezca en el interior de $\mathbb{E}_\sigma^0$, ver Figura 8-26) que terminará en el instante en que dicha trayectoria alcance la superficie de fluencia $\partial\mathbb{E}_\sigma^0$. La superficie de fluencia inicial ejerce entonces un papel indicador del instante de *fallo* (entendido como fin del comportamiento elástico) independientemente del posible comportamiento post-fallo (comportamiento plástico) que se inicie más allá de dicho instante. De ahí la importancia de la superficie de fluencia inicial y el interés de formular las ecuaciones matemáticas que la determinan de forma adecuada para los distintos materiales de interés en la ingeniería.

NOTA

El hecho de que la superficie de fluencia, entendida como un ingrediente adicional de la ecuación constitutiva, sea independiente del sistema de referencia, caracteriza un comportamiento elastoplástico isotrópo.

Con el fin de hacer la superficie de fluencia independiente del sistema de referencia (material isótropo), aunque se formule en el espacio de tensiones principales, su ecuación matemática suele plantearse en función de los invariantes tensionales:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv F(I_1,\, J_2',\, J_3') \tag{8.54}$$

y, puesto que se adopta el criterio $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, su definición sólo afectará al primer sector del espacio de tensiones principales, extendiéndose automáticamente, por las condiciones de simetría (ver Observación 8-7), a los restantes sectores de la Figura 8-7.

8.8.1 Criterio de von Mises

En el criterio de von Mises se define la superficie de fluencia mediante:

$$\boxed{\text{Criterio de Von Mises} \rightarrow F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_e = \sqrt{3J_2'} - \sigma_e = 0} \tag{8.55}$$

donde $\bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{3J_2'}$ es la *tensión efectiva* (ver Observación (8.3)). Una expresión alternativa se obtiene considerando las ecuaciones (8.18) y (8.19) y substituyéndolas en la ecuación (8.55), obteniéndose:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2\right]^{1/2} - \sigma_e = 0 \qquad (8.56)$$

La representación gráfica de la superficie de fluencia de von Mises puede verse en la Figura 8-27.

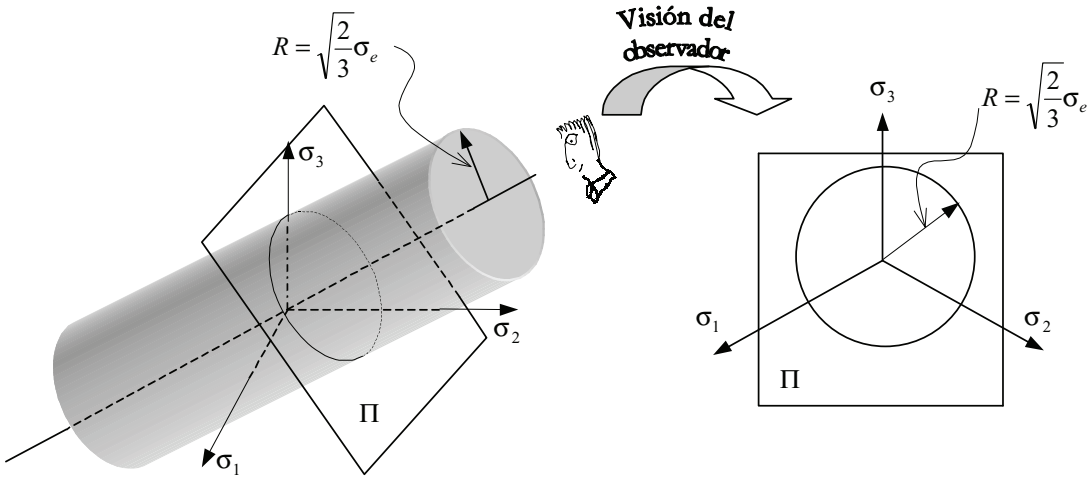


Figura 8-27 – Criterio de von Mises

Observación 8-16

La ecuación (8.55) pone de manifiesto la única dependencia de la superficie de fluencia de von Mises del segundo invariante del tensor de tensiones J_2'. En consecuencia, todo los puntos de la superficie vendrán caracterizados por un mismo valor de J_2', lo que define un cilindro cuyo eje es el eje de tensión hidrostática.

Observación 8-17

El criterio de von Mises es adecuado como criterio de fallo o de rotura en metales, en los que, típicamente, estados de tensión hidrostática (tanto de tracción como de compresión) tienen un comportamiento elástico y la rotura se produce debido a la presencia de componentes desviadoras de la tensión.

Ejemplo 8-2 – *Obtener la expresión del criterio de von Mises para un caso de tensión uniaxial.*

Resolución:
Para un caso de tensión uniaxial, caracterizado por el estado tensional:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

resulta ser (ver Ejemplo 8-1) $\bar{\sigma} = |\sigma_u|$ y substituyen en la ecuación (8.55):

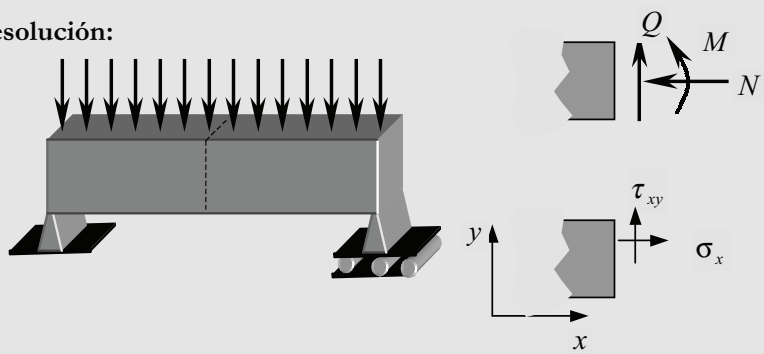
$$F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_e = |\sigma_u| - \sigma_e$$

y el dominio elástico inicial queda caracterizado, de la misma forma que para el caso de plasticidad unidimensional del apartado 8.6.2 por la condición:

$$\boxed{F(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \Rightarrow |\sigma_u| < \sigma_e}$$

Ejemplo 8-3 – *Obtener la expresión del criterio de von Mises par un estado tensional típico de flexión compuesta en vigas.*

Resolución:



El estado tensional para un caso de flexión compuesta resulta ser:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_x \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\sigma_x \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & -\frac{1}{3}\sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_x \end{bmatrix}$$

$$J_2' = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\sigma_x^2 + \frac{1}{9}\sigma_x^2 + \frac{1}{9}\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xy}^2\right) = \frac{1}{3}\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2'} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \Rightarrow \qquad F(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \Rightarrow \bar{\sigma} < \sigma_e \Rightarrow$$

$$\sigma_{co} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} < \sigma_e$$

donde la tensión de comparición $\sigma_{co} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}$, que puede entenderse como un escalar de comparación frente al límite elástico uniaxial σ_e, es frecuentemente utilizada en las normas de diseño de estructuras metálicas.

8.8.2 Criterio de Tresca o de la máxima tensión tangencial

El criterio de Tresca, se conoce también *como criterio de la máxima tensión cortante*, y establece que el dominio elástico finaliza, para un cierto punto del medio, cuando la máxima tensión tangencial actuante en cualquiera de los planos que pasan por el punto, $\tau_{máx}$, alcanza la mitad del límite elástico uniaxial σ_e:

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_e}{2} \tag{8.57}$$

En la Figura 8-28 se esquematiza la situación de fallo en términos de círculo de Mohr en tres dimensiones. En un proceso de carga en el que dicho círculo va creciendo desde el origen, el comportamiento elástico termina cuando el círculo de radio $\tau_{máx}$ se hace tangente a la recta $\tau = \tau_{máx} = \sigma_e/2$.

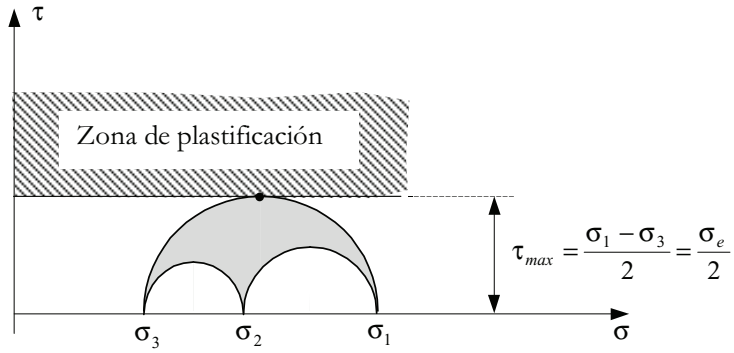


Figura 8-28

Es evidente que, a la vista de la ecuación (8.57), el criterio de Tresca puede escribirse como:

$$\text{Criterio de Tresca} \rightarrow F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv (\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_e = 0 \tag{8.58}$$

Observación 8-18

Puede comprobarse que el criterio de Tresca se escribe de forma unívoca como una función de $J_2^{'}$ y $J_3^{'}$ y que no depende del primer invariante I_1:

$$\text{Criterio de Tresca} \rightarrow F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv (\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_e \equiv \mathcal{F}(J_2^{'}, J_3^{'})$$

En la Figura 8-29 se presenta la correspondiente superficie de fluencia en el espacio de tensiones principales, que resulta ser un prisma hexaédrico con eje el eje de tensión hidrostática.

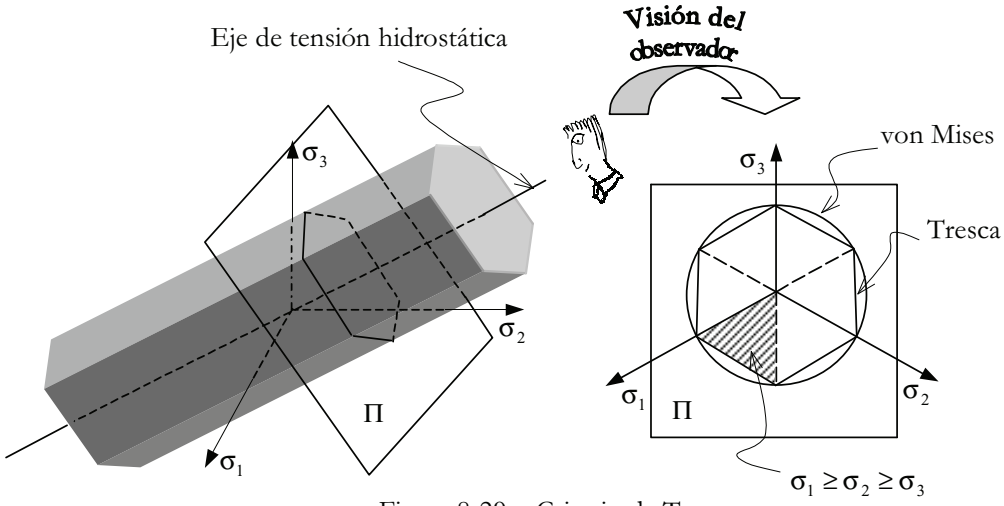


Figura 8-29 – Criterio de Tresca

Observación 8-19

Al no depender del primer invariante de tensiones (y por tanto de la tensión σ_{oct}, ver ecuación (8.16)), la superficie de fluencia del criterio de Tresca no depende de la distancia del origen al plano octaédrico que pasa por el punto (ver Observación 8-4), por lo que si un punto del espacio de tensiones, caracterizado por sus invariantes (I_1, J_2', J_3'), está sobre dicha superficie de fluencia, también lo estarán todos los puntos del espacio de tensiones con los mismos valores de (J_2', J_3'). Esta circunstancia cualifica a la superficie de fluencia como una superficie prismática cuyo eje es el eje de tensión hidrostática. Por otra parte, la dependencia de los dos invariantes (J_2', J_3'), impide que, como ocurre con el caso de la superficie de von Mises, se trate de una superficie cilíndrica. En definitiva, las condiciones de simetría establecen que la superficie del criterio de Tresca sea un prisma hexagonal inscrito en el cilindro de von Mises (ver Figura 8-29).

Ejemplo 8-4 – *Obtener la expresión del criterio de Tresca para un caso de tensión uniaxial.*

Resolución:
Para un caso de tensión uniaxial, caracterizado por el estado tensional:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) $\sigma_u \geq 0$ $\left.\begin{matrix}\sigma_1 = \sigma_u \\ \sigma_3 = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow F(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_e = \sigma_u - \sigma_e = |\sigma_u| - \sigma_e$

b) $\sigma_u < 0$ $\left.\begin{matrix}\sigma_1 = 0 \\ \sigma_3 = \sigma_u\end{matrix}\right\} \Rightarrow F(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_e = -\sigma_u - \sigma_e = |\sigma_u| - \sigma_e$

y el dominio elástico inicial queda caracterizado, de la misma forma que para el caso de plasticidad unidimensional del apartado 8.6.2, por la condición:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \Rightarrow |\sigma_u| < \sigma_e$$

Observación 8-20

El criterio de Tresca se utiliza para modelar el comportamiento de los metales de forma similar al caso del criterio de von Mises (ver Observación 8-17).

8.8.3 Criterio de Mohr-Coulomb

El criterio de Mohr-Coulomb puede considerarse una generalización del criterio de Tresca, en el que la máxima tensión tangencial resistida depende del propio estado tensional en el punto (ver Figura 8-30). La línea de fallo, en el espacio del círculo de Mohr, es una recta caracterizada por la cohesión c y el ángulo de rozamiento interno ϕ, considerados propiedades del material:

$$\tau = c - \sigma \operatorname{tg}\phi \tag{8.59}$$

El fin del comportamiento elástico (fallo) en un proceso de carga creciente, se produce cuando un primer punto del circulo de Mohr (correspondiente a un cierto plano) alcanza la mencionada línea de fallo.

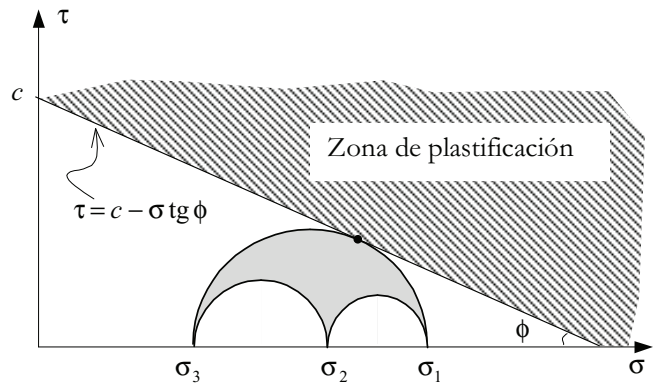


Figura 8-30 – Criterio de Mohr-Coulomb

La tensión tangencial en dicho plano, τ, será tanto menor cuanto mayor sea la tensión normal en el mismo σ y, en este caso, resulta evidente que el comportamiento de este modelo a tracción será muy distinto del comportamiento a compresión. Tal como se ve en la Figura 8-30, la línea de fallo corta al eje de las tensiones normales en el lado positivo de las mismas, limitando de esta manera la capacidad del material de resistir tracciones.

Para obtener la expresión matemática de la superficie de fluencia, consideremos un estado tensional para el cual se produce el inicio de la plastificación. En este caso, el circulo de Mohr definido por las tensiones principales mayor y menor, será tangente a la línea de fallo (ver Figura 8-31) en el punto A, verificándose:

$$R=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tau_A = R\cos\phi = \dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\cos\phi \\ \sigma_A = \dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2} + R\,\mathrm{sen}\,\phi = \dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2} + \dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\,\mathrm{sen}\,\phi \end{cases} \tag{8.60}$$

y substituyendo la ecuación (8.60) en la (8.59), se tiene:

$$\begin{aligned} &\tau_A = c - \sigma_A \,\mathrm{tg}\,\phi \quad \Rightarrow \quad \tau_A + \sigma_A \,\mathrm{tg}\,\phi - c = 0 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\cos\phi + \left[\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\,\mathrm{sen}\,\phi\right]\mathrm{tg}\,\phi - c = 0 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\sigma_1-\sigma_3)+(\sigma_1+\sigma_3)\,\mathrm{sen}\,\phi - 2c\cos\phi = 0 \end{aligned} \tag{8.61}$$

Criterio de Mohr - Coulomb $\rightarrow F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv (\sigma_1-\sigma_3)+(\sigma_1+\sigma_3)\,\mathrm{sen}\,\phi - 2c\cos\phi = 0$ (8.62)

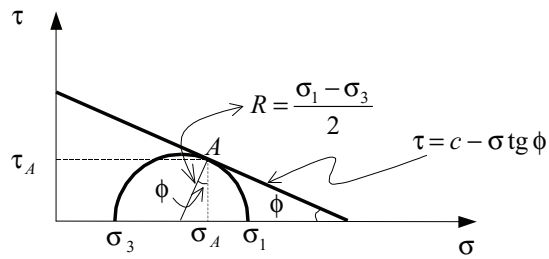


Figura 8-31

Observación 8-21

La ecuación $F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv (\sigma_1-\sigma_3)+(\sigma_1+\sigma_3)\,\mathrm{sen}\,\phi - 2c\cos\phi = 0$ (lineal en σ_1, σ_3) define *un plano* el espacio de tensiones principales restringido al sector $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. La extensión, por simetrización, a los otros seis sectores (ver Observación 8-7) define seis planos que constituyen una pirámide, de longitud indefinida, cuyo eje es el eje de presión hidrostática (ver la Figura 8-32). La distancia del vértice de la pirámide al origen del espacio de tensiones es $d = \sqrt{3}\,c\cot\phi$.

Observación 8-22

La particularización $\phi = 0$ y $c = \sigma_e / 2$ en el criterio de Mohr-Coulomb recobra el criterio de Tresca (ver ecuaciones (8.58) y (8.62)).

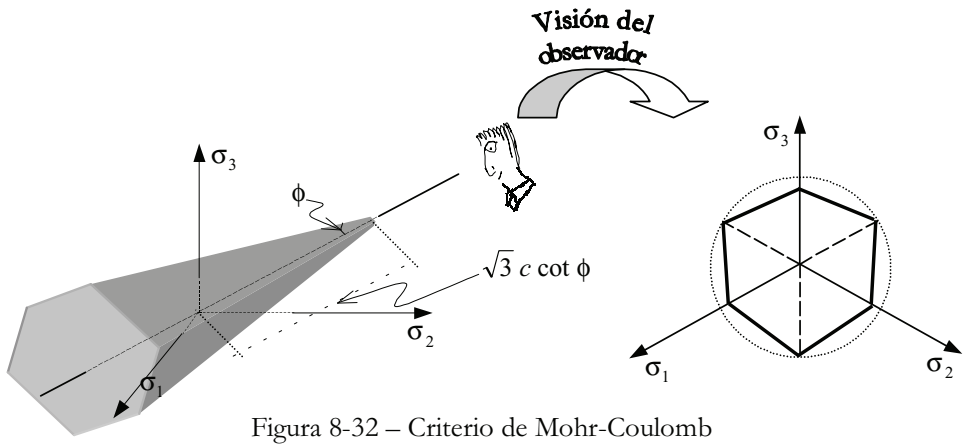


Figura 8-32 – Criterio de Mohr-Coulomb

Observación 8-23

En Mecánica de Suelos, el criterio de signos de las tensiones normales es el contrario que en Mecánica de Medios Continuos ($\sigma \equiv -\sigma$, ver capítulo 4) $\Rightarrow \sigma_1 \equiv -\sigma_3$ y $\Rightarrow \sigma_3 \equiv -\sigma_1$, por lo que el criterio de Mohr-Coulomb de la ecuación (8.62) se escribe:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv (\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3)\operatorname{sen}\phi - 2c\cos\phi$$

y las correspondientes representaciones gráficas se presentan en la Figura 8-33 y Figura 8-34.

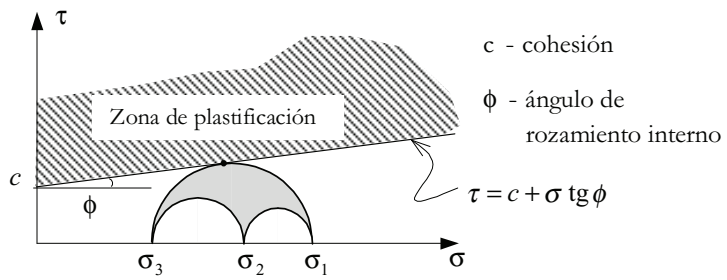


Figura 8-33

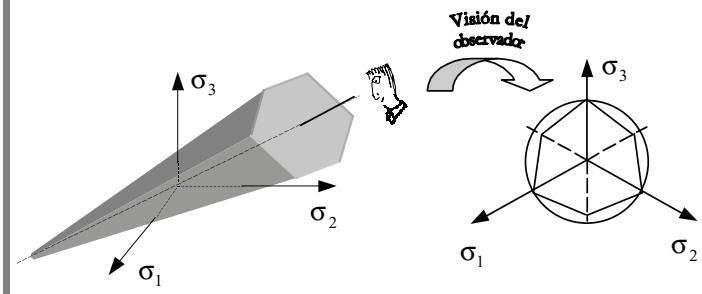


Figura 8-34 – Criterio de Mohr-Coulomb en Mecánica de suelos

Observación 8-24

Tras algunas operaciones algebraicas, el criterio de Mohr-Coulomb puede escribirse en función de los tres invariantes tensionales:

$$\text{Criterio de Mohr - Coulomb} \rightarrow F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \mathcal{F}(I_1, J_2', J_3')$$

Observación 8-25

El criterio de Mohr-Coulomb resulta especialmente adecuado para materiales friccionales (hormigón, rocas y suelos) caracterizados por exhibir sustanciales diferencias entre los límites elásticos uniaxiales a tracción y a compresión.

8.8.4 Criterio de Drucker-Prager

La superficie de fluencia que define el criterio de Drucker-Prager viene dada por la expresión:

$$\text{Criterio de Drucker - Prager} \rightarrow F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv 3\alpha\sigma_m + \left(J_2'\right)^{1/2} - \beta = 0 \tag{8.63}$$

donde:

$$\alpha = \frac{2sin\phi}{\sqrt{3}(3 - sin\phi)} \quad ; \quad \beta = \frac{6c\cos\phi}{\sqrt{3}(3 - sin\phi)} \quad ; \quad \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3} \tag{8.64}$$

siendo c y ϕ, la cohesión y ángulo de rozamiento interno, respectivamente, que son considerados propiedades del material. Teniendo en cuenta las expresiones (8.16) ($\sigma_m = \frac{I_1}{3} = \sigma_{oct}$) y (8.18) ($\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,[J_2']^{1/2}$), el criterio puede escribirse:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \alpha I_1 + \left(J_2'\right)^{1/2} - \beta = 3\alpha\sigma_{oct} + \sqrt{\frac{3}{2}}\,\tau_{oct} - \beta = \mathcal{F}(I_1, J_2',) = 0 \tag{8.65}$$

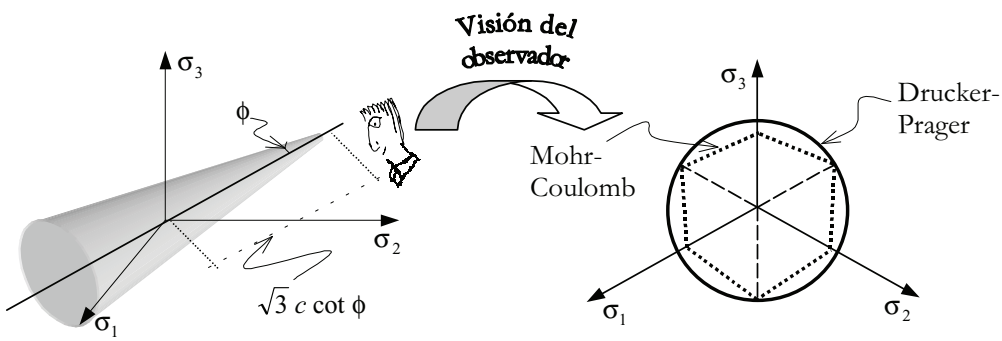


Figura 8-35 – Criterio de Drucker-Prager

Observación 8-26

La independencia del tercer invariante, $J_3^{'}$, establece que si un determinado punto del espacio de tensiones está sobre la superficie de fluencia, todos los demás puntos con el mismo valor de los invariantes $I_1, J_2^{'}$ también estarán sobre aquella, independientemente del valor del tercer invariante $J_3^{'}$. Puesto que valores constantes de dichos invariantes corresponden a puntos del plano octaédrico situados a la misma distancia del eje de tensión hidrostática (ver Figura 8-6), puede concluirse que la superficie de fluencia será una superficie de revolución alrededor de dicho eje. Además, al ser lineal la relación entre σ_{oct} y τ_{oct} en la ecuación (8.65), se tratará de una superficie cónica cuyo eje es el eje de tensión hidrostática (ver Figura 8-5 y Figura 8-35)). La distancia del vértice del cono al origen del espacio de tensiones resulta ser $d = \sqrt{3}\, c \cot \phi$. Puede comprobarse también que la superficie de Drucker-Prager tiene seminscrita una superficie de Mohr-Coulomb con los mismos valores de cohesión, c, y ángulo de rozamiento interno, ϕ.

Observación 8-27

La situación del vértice del cono de Drucker-Prager en el lado positivo del eje de tensión hidrostática establece una limitación del rango de comportamiento elástico para estados de tensión hidrostática de tracción (mientras que no hay limitación en el límite elástico para el caso de compresión hidrostática). Esta situación, que también se produce en el criterio de Mohr-Coulomb, es característica de las materiales cohesivos-friccionales (hormigón, rocas y suelos) para los que resultan especialmente adecuados ambos criterios.

Observación 8-28

En Mecánica del suelo, donde el criterio de signos para las tensiones normales se invierte, la superficie de fluencia de Drucker-Prager sería la indicada en la Figura 8-36:

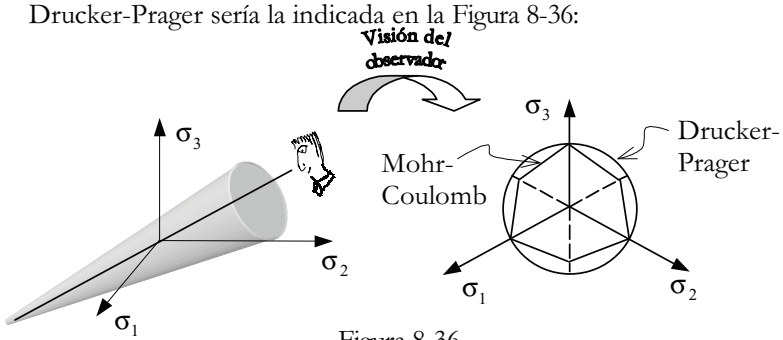


Figura 8-36

Observación 8-29

La particularización $\phi = 0$ y $c = \sigma_e / 2$ en el criterio de Drucker-Prager recobra el criterio de von Mises (ver ecuaciones (8.55), (8.63) y (8.64)).

9 Ecuaciones constitutivas en fluidos

9.1 Concepto de presión

En Mecánica de Medios Continuos se utilizan diversos conceptos de presión (presión hidrostática, presión media y presión termodinámica) que, en general, no son coincidentes.

9.1.1 Presión hidrostática

Principio de Pascal:

En un fluido en reposo el estado tensional sobre cualquier plano que pase por un punto es el mismo y viene caracterizado por una tensión normal de compresión.

De acuerdo con el principio de Pascal el estado tensional de un fluido en reposo está caracterizado por un tensor de tensiones de la forma:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = -p_0 \mathbf{1} \\ \sigma_{ij} = -p_0 \delta_{ij} \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{9.1}$$

donde p_0 es la denominada *presión hidrostática* (ver Figura 9-1).

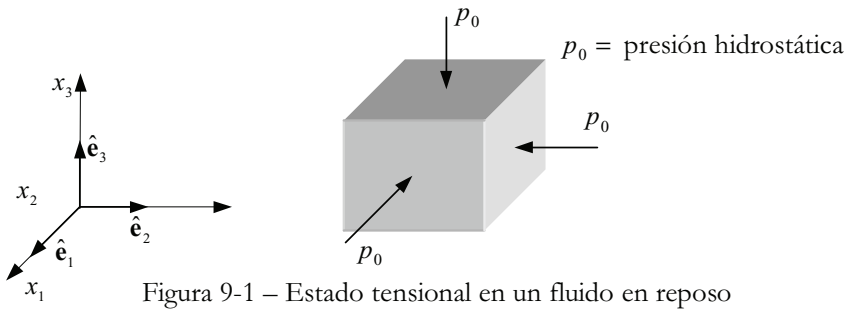


Figura 9-1 – Estado tensional en un fluido en reposo

Definición:

Presión hidrostática:

Tensión normal de compresión, constante sobre cualquier plano, que actúa sobre un fluido en reposo.

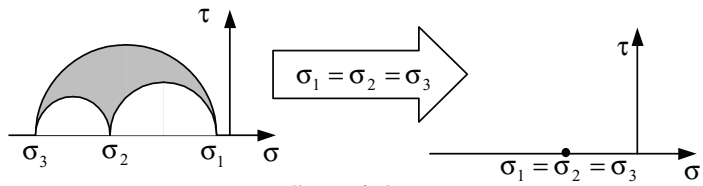


Figura 9-2

Observación 9-1

El tensor de tensiones para un fluido en reposo es un tensor *esférico* y su representación en el plano de Mohr corresponde a un punto (ver Figura 9-2). En consecuencia, cualquier dirección es principal y el estado tensional constituye lo que en el capítulo 4 (ver apartado 4.8) fue denominado *estado tensional hidrostático*.

9.1.2 Presión media

Definiciones

Tensión media:

Se define la tensión media σ_m como:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} Tr\,(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$$

Presión media:

Se define la presión media $\overline{p}$ como la tensión media cambiada de signo:

$$\overline{p} \overset{def}{=} \text{presión media} = -\sigma_m = -\frac{1}{3} Tr(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{3}\sigma_{ii}$$

Observación 9-2

Para un fluido en reposo, la presión media $\overline{p}$ coincide con la presión hidrostática p_0:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p_0 \mathbf{1} \Rightarrow \sigma_m = \frac{1}{3}(-3p_0) = -p_0 \Rightarrow \overline{p} = p_0$$

En general, para un fluido en movimiento la presión media y la presión hidrostática no coinciden.

Observación 9-3

La traza del tensor de tensiones de Cauchy es un invariante del tensor de tensiones. En consecuencia, la tensión media y la presión media serán también invariantes del tensor de tensiones, y por lo tanto, su valor no dependerá del sistema de coordenadas cartesiano adoptado.

9.1.3 Presión termodinámica. Ecuación cinética de estado

En las ecuaciones constitutivas de fluidos o gases interviene una nueva variable termodinámica de presión que se denomina *presión termodinámica* y se denota como p.

Definición

Presión termodinámica:

Aquella variable de presión que interviene en las ecuaciones constitutivas de los fluidos y gases y que está relacionada con la densidad ρ y la temperatura absoluta θ mediante la denominada *ecuación cinética de estado,* $F(p,\rho,\theta)=0$.

Ejemplo 9-1

Un ejemplo típico de ecuación cinética de estado es la Ley de los gases:

$$F(p,\rho,\theta)\equiv p-\rho R\theta=0 \Rightarrow \quad p=\rho R\theta$$

donde p es la presión termodinámica y R es la constante universal de los gases.

Observación 9-4

Para un *fluido en reposo*, la presión hidrostática, la presión media y la presión termodinámica, coinciden:

$$\text{fluido en reposo} \Rightarrow p_0=\overline{p}=p\,.$$

En general, para un fluido en movimiento, la presión termodinámica p será distinta de la presión media $\overline{p}$ y de la presión hidrostática p_0.

Observación 9-5

Fluido barotrópico: Se dice que un fluido es barotrópico cuando en la ecuación cinética de estado no interviene la temperatura:

$$\text{Fluido barotrópico} \rightarrow F(p,\rho)=0 \Rightarrow\ p=f(\rho)\Rightarrow \rho=g(p)$$

Observación 9-6

Fluido incompresible. Un caso particular de fluido barotrópico es el fluido incompresible, caracterizado por tener densidad constante ($\rho(\mathbf{x},t)=k=ctte$). En este caso la ecuación cinética de estado puede escribirse:

$$F(p,\rho,\theta)\equiv \rho-k=0$$

y no depende ni de la presión ni de la temperatura.

9.2 Ecuaciones constitutivas en mecánica de fluidos

Consideraremos a continuación el conjunto de ecuaciones, denominadas genéricamente *ecuaciones constitutivas*, que es necesario añadir a las ecuaciones de conservación/balance para la formulación de un problema de mecánica de fluidos (ver Capítulo 6, apartado 5.13). Estas ecuaciones pueden agruparse como sigue:

a) *Ecuaciones constitutivas termomecánicas*

Expresan el tensor de tensiones de Cauchy en función de otras variables termodinámicas, típicamente la presión termodinámica p, el tensor velocidad de deformación $\mathbf{d}$ (que implícitamente se puede considerar una función de la velocidad $\mathbf{d}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\nabla}^S \mathbf{v}$), la densidad ρ y la temperatura absoluta θ:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ecuaciones constitutivas}\\ \text{termomecánicas}\end{array}\right\} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \mathbf{f}(\mathbf{d},\rho,\theta) \quad \text{(6 ecuaciones)} \qquad (9.2)$$

b) *Ecuación constitutiva de la entropía*

Una ecuación algebraica que proporciona la entropía específica s en función de la velocidad de deformación, la densidad y la temperatura:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ecuación constitutiva}\\ \text{de la entropía}\end{array}\right\} \rightarrow s = s(\mathbf{d},\rho,\theta) \qquad \text{(1 ecuación)} \qquad (9.3)$$

c) *Ecuaciones constitutivas de tipo "termodinámico" o ecuaciones de estado*

Son típicamente la *ecuación calórica de estado*, que define la energía interna específica u, y la *ecuación cinética de estado*, que proporciona una ecuación para la presión termodinámica:

$$\begin{array}{l}\text{Ecuación calórica de estado} \rightarrow u = g(\rho,\theta)\\ \text{Ecuación cinética de estado} \rightarrow F(\rho,p,\theta) = 0\end{array} \quad \text{(2 ecuaciones)} \qquad (9.4)$$

d) *Ecuaciones constitutivas de tipo "térmico"*

La más común es la denominada *Ley de Fourier,* que establece el flujo de calor por conducción $\mathbf{q}$ como:

$$\text{Ley de Fourier} \rightarrow \begin{cases}\mathbf{q} = -\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta\\ q_i = k_{ij}\dfrac{\partial\theta}{\partial x_j} \quad i \in \{1,2,3\}\end{cases} \quad \text{(3 ecuaciones)} \qquad (9.5)$$

donde $\mathbf{k}$ es el tensor (de segundo orden y simétrico) de conductividad térmica, que es una propiedad del fluido. Para el caso isótropo, el tensor de

conductividad térmica es un tensor esférico $\mathbf{k} = k\mathbf{1}$ y depende del parámetro escalar k que es la conductividad térmica del fluido.

9.3 Ecuaciones constitutivas (mecánicas) en fluidos viscosos

Las ecuaciones constitutivas termomecánicas para un fluido viscoso pueden escribirse en general (ver ecuación (9.2)) como:

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \mathbf{f}(\mathbf{d}, \rho, \theta) \\ \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mathrm{f}_{ij}(\mathbf{d}, \rho, \theta) \quad i, j \in \{1,2,3\} \end{cases}} \tag{9.6}$$

donde $\mathbf{f}$ es una función tensorial simétrica. Según el carácter de la función $\mathbf{f}$ se obtienen los siguientes modelos de fluidos:

a) *Fluidos de Stokes o stokesianos*: la función $\mathbf{f}$ es una función no lineal de sus argumentos.
b) *Fluidos newtonianos*: la función $\mathbf{f}$ es una función *lineal* de sus argumentos.
c) *Fluidos perfectos*: la función $\mathbf{f}$ es idénticamente nula. En este caso la ecuación constitutiva mecánica es: $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1}$.

En lo que sigue se considerarán únicamente los casos de fluidos newtonianos y de fluidos perfectos.

Observación 9-7

La hipótesis de fluido perfecto es muy frecuente en Ingeniería Hidráulica, donde el fluido con el que se trata es el agua.

9.4 Ecuaciones constitutivas (mecánicas) en fluidos newtonianos

NOTA

No se consideran aquí las posibles dependencias de la temperatura en la ecuación constitutiva.

La ecuación constitutiva mecánica para los fluidos Newtonianos puede escribirse como:

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \mathbb{C} : \mathbf{d} \\ \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mathbb{C}_{ijkl} d_{kl} \quad i, j \in \{1,2,3\} \end{cases}} \tag{9.7}$$

donde $\mathbb{C}$ es un tensor constitutivo (de viscosidad) *constante* de cuarto orden. Como resultado de le ecuación (9.7) se obtiene una dependencia lineal del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ con la velocidad de deformación $\mathbf{d}$. Para un *fluido newtoniano isótropo*, el tensor constitutivo $\mathbb{C}$ es un tensor *isótropo* de cuarto orden.

$$\begin{cases} \mathbb{C} = \lambda\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu\mathbf{I} \\ C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad i, j, k, l \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{9.8}$$

Observación 9-8

Nótese el paralelismo que puede establecerse entre las ecuaciones constitutivas mecánicas de un fluido newtoniano y las de un sólido elástico lineal (ver capítulo 6):

Fluido Newtoniano	*Sólido Elástico Lineal*
$\begin{cases}\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \mathbb{C} : \mathbf{d} \\ \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mathbb{C}_{ijkl} d_{kl}\end{cases}$	$\begin{cases}\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl}\end{cases}$

Substituyendo la ecuación (9.8) en la ecuación constitutiva mecánica (9.7), se obtiene:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + (\lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}) : \mathbf{d} = -p\mathbf{1} + \lambda Tr(\mathbf{d})\mathbf{1} + 2\mu\,\mathbf{d} \tag{9.9}$$

Ecuación constitutiva para un fluido Newtoniano Isótropo

$$\rightarrow \begin{cases}\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \lambda Tr(\mathbf{d})\mathbf{1} + 2\mu\,\mathbf{d} \\ \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda d_{ll}\delta_{ij} + 2\mu d_{ij} \qquad i, j \in \{1,2,3\}\end{cases} \tag{9.10}$$

Observación 9-9

Los dos parámetros λ y μ corresponden físicamente a viscosidades entendidas como propiedades del material. En el caso más general, pueden no ser constantes y depender de otras variables termodinámicas:

$$\lambda = \lambda(\rho, \theta) \qquad \mu = \mu(\rho, \theta)$$

Un típico ejemplo lo constituye una dependencia de la viscosidad con la temperatura del tipo $\mu(\theta) = \mu_0 e^{-\alpha(\theta - \theta_0)}$, que establece que la viscosidad del fluido disminuye a medida que aumenta la temperatura (ver Figura 9-3).

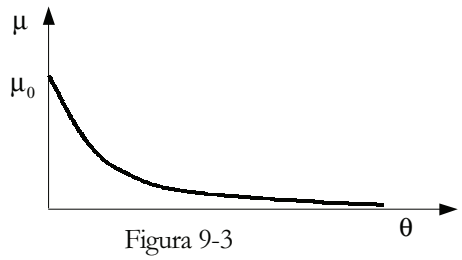


Figura 9-3

9.4.1 Relación entre la presión termodinámica y la presión media.

En general la presión termodinámica, p, y la presión media, $\overline{p}$, en un fluido newtoniano en movimiento, serán distintas aunque estén relacionadas entre sí. A partir de la ecuación constitutiva (mecánica) de un fluido newtoniano (9.10) puede obtenerse:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \lambda Tr(\mathbf{d})\mathbf{1} + 2\mu\,\mathbf{d} \Rightarrow$$

$$\underbrace{Tr(\boldsymbol{\sigma})}_{-3\bar{p}} = -pTr(\mathbf{1}) + \lambda Tr(\mathbf{d})Tr(\mathbf{1}) + 2\mu Tr(\mathbf{d}) = -3p + (3\lambda + 2\mu)Tr(\mathbf{d}) \Rightarrow \tag{9.11}$$

$$p = \bar{p} + \underbrace{(\lambda + \frac{2}{3}\mu)}_{\mathcal{K}} Tr(\mathbf{d}) = \bar{p} + \mathcal{K}\,Tr(\mathbf{d}) =$$

donde $\mathcal{K} = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ es la denominada *viscosidad volumétrica del fluido*.

$$\boxed{\text{Viscosidad volumétrica} \rightarrow \mathcal{K} = \lambda + \frac{2}{3}\mu} \tag{9.12}$$

Utilizando la ecuación de continuidad (conservación de la masa), se tiene:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0 \rightarrow \nabla\cdot\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} \tag{9.13}$$

Considerando además la relación:

$$Tr(\mathbf{d}) = d_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} \tag{9.14}$$

y substituyendo en la ecuación (9.11), se llega a:

$$\boxed{p = \bar{p} + \mathcal{K}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = \bar{p} - \frac{\mathcal{K}}{\rho}\frac{d\rho}{dt}} \tag{9.15}$$

que relaciona la presión media y la presión termodinámica.

Observación 9-10

De acuerdo con la ecuación (9.15), la presión termodinámica y la presión media, en un fluido newtoniano, coincidirán en los siguientes casos:

- *Fluido en reposo* $\Rightarrow \mathbf{v} = 0 \Rightarrow p = \bar{p} = p_0$
- *Fluido incompresible* $\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow p = \bar{p}$
- *Fluido con viscosidad volumétrica* $\mathcal{K}$ *nula* (condición de Stokes):

$$\mathcal{K} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}\mu \Rightarrow p = \bar{p}$$

NOTA

La condición de Stokes se supone en ciertos casos porque los resultados que se obtienen con ello concuerdan con la observación experimental.

9.4.2 Ecuación constitutiva en componentes esféricas y desviadoras

a) Parte esférica

De la ecuación (9.15) se tiene:

$$\boxed{\overline{p} = p - \mathcal{K}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = p - \mathcal{K}\,Tr(\mathbf{d})} \tag{9.16}$$

b) Parte desviadora

Utilizando la descomposición del tensor de tensiones de $\boldsymbol{\sigma}$ y del tensor velocidad de deformación $\mathbf{d}$ en sus componentes esférica y desviadora, y substituyendo en la ecuación constitutiva (9.10):

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3}\underbrace{Tr(\boldsymbol{\sigma})}_{-3\overline{p}}\mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}' = -\overline{p}\,\mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}' = -p\,\mathbf{1} + \lambda Tr(\mathbf{d})\mathbf{1} + 2\mu\,\mathbf{d}\\
&\boldsymbol{\sigma}' = \underbrace{(\overline{p} - p)}_{-\mathcal{K}\,Tr(\mathbf{d})}\mathbf{1} + \lambda Tr(\mathbf{d})\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{d} = -\underbrace{\mathcal{K}}_{\lambda+\frac{2}{3}\mu}Tr(\mathbf{d})\mathbf{1} + \lambda Tr(\mathbf{d})\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{d} =\\
&= -\frac{2}{3}\mu Tr(\mathbf{d})\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{d} = 2\mu\underbrace{\left[\mathbf{d} - \frac{1}{3}Tr(\mathbf{d})\mathbf{1}\right]}_{\mathbf{d}'} = 2\mu\,\mathbf{d}'
\end{aligned}\right\}\Rightarrow \tag{9.17}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}' = 2\mu\mathbf{d}'}$$

donde se han tenido en cuenta las ecuaciones (9.16) y (9.12) ($\mathcal{K} = \lambda + \frac{2}{3}\mu$).

9.4.3 Potencia tensional, potencia recuperable y potencia disipativa

Utilizando de nuevo la descomposición del tensor de tensiones y del tensor velocidad de deformación, en sus componentes esférica y desviadora, se tiene:

$$\boldsymbol{\sigma} = -\overline{p}\mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}' \quad , \quad \mathbf{d} = \frac{1}{3}Tr(\mathbf{d})\mathbf{1} + \mathbf{d}' \tag{9.18}$$

y substituyendo en la expresión de la densidad de potencia tensional (por unidad de volumen) $\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d} &= (-\overline{p}\mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}'):(\tfrac{1}{3}Tr(\mathbf{d})\mathbf{1} + \mathbf{d}') =\\
&= -\frac{1}{3}\overline{p}\,Tr(\mathbf{d})\underbrace{\mathbf{1}:\mathbf{1}}_{3} + \boldsymbol{\sigma}':\mathbf{d}' - \overline{p}\underbrace{\mathbf{1}:\mathbf{d}'}_{Tr(\mathbf{d}')=0} + \frac{1}{3}Tr(\mathbf{d})\underbrace{\boldsymbol{\sigma}':\mathbf{1}}_{Tr(\boldsymbol{\sigma}')=0} =\\
&= -\overline{p}\,Tr(\mathbf{d}) + \boldsymbol{\sigma}':\mathbf{d}'
\end{aligned} \tag{9.19}$$

NOTA

Se utiliza aquí la propiedad de que la traza de todo tensor desviador es nula.

y substituyendo las ecuaciones (9.16) y (9.17) en la ecuación (9.19):

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{p} = p - \mathcal{K}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = p - \mathcal{K}\,Tr(\mathbf{d})\\
&\boldsymbol{\sigma}' = 2\mu\mathbf{d}'\\
&\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d} = -[p - \mathcal{K}\,Tr(\mathbf{d})]\;Tr(\mathbf{d}) + 2\mu\;\mathbf{d}':\mathbf{d}' \Rightarrow
\end{aligned}\right\}\Rightarrow \tag{9.20}$$

$$\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}=\underbrace{-pTr(\mathbf{d})}_{\substack{\text{potencia recuperable}\\ \mathrm{W_R}}}+\underbrace{\mathcal{K}\,Tr^2(\mathbf{d})+2\mu\,\mathbf{d}':\mathbf{d}'}_{\substack{\text{potencia disipativa}\\ 2\mathrm{W_D}}}=W_R+2W_D \tag{9.21}$$

$$\begin{array}{ll}\text{Densidad de potencia recuperable} & \rightarrow\ \mathrm{W_R}=-pTr(\mathbf{d})\\ \text{Densidad de potencia disipativa} & \rightarrow\ 2\mathrm{W_D}=\mathcal{K}\,Tr^2(\mathbf{d})+2\mu\mathbf{d}':\mathbf{d}'\end{array} \tag{9.22}$$

Asociados a los conceptos de potencia recuperable y potencia disipativa aparecen los de las partes recuperable, $\boldsymbol{\sigma}_R$, y disipativa, $\boldsymbol{\sigma}_D$, del tensor de tensiones definidas como:

$$\boldsymbol{\sigma}=\underbrace{-p\mathbf{1}}_{\boldsymbol{\sigma}_R}+\underbrace{\lambda Tr(\mathbf{d})\mathbf{1}+2\mu\,\mathbf{d}}_{\boldsymbol{\sigma}_D}\Rightarrow\ \boxed{\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}_R+\boldsymbol{\sigma}_D} \tag{9.23}$$

Utilizando dicha notación, pueden reescribirse las expresiones de las densidades de la potencia recuperable, de la potencia disipativa y de la potencia total como:

$$\begin{cases}W_R=-pTr(\mathbf{d})=-p\mathbf{1}:\mathbf{d}=\boldsymbol{\sigma}_R:\mathbf{d}\\ 2W_D=\mathcal{K}\,Tr^2(\mathbf{d})+2\mu\mathbf{d}':\mathbf{d}'=\boldsymbol{\sigma}_D:\mathbf{d}\end{cases} \tag{9.24}$$

$$\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}=(\boldsymbol{\sigma}_R+\boldsymbol{\sigma}_D):\mathbf{d}=\boldsymbol{\sigma}_R:\mathbf{d}+\boldsymbol{\sigma}_D:\mathbf{d}=\mathrm{W_R}+2\mathrm{W_D}$$

Observación 9-11

Para un fluido incompresible, la potencia recuperable es nula. En efecto por ser el fluido incompresible $\frac{d\rho}{dt}=0$ y por la ecuación de continuidad $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=0=Tr(\mathbf{d})\ \ \Rightarrow W_R=-pTr(\mathbf{d})=0$

Observación 9-12

Utilizando la descomposición de la potencia tensional (9.24), el Teorema de las Fuerzas Vivas puede escribirse como:

$$P_e=\frac{d\mathcal{K}}{dt}+\int_V\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}\ dV=\frac{d\mathcal{K}}{dt}+\int_V\boldsymbol{\sigma}_R:\mathbf{d}\ dV+\int_V\boldsymbol{\sigma}_D:\mathbf{d}\ dV$$

$$\boxed{P_e=\frac{d\mathcal{K}}{dt}+\int_V W_R dV+\int_V 2W_D dV}$$

que indica que la potencia mecánica entrante en el fluido P_e se invierte en modificar la energía cinética $\mathcal{K}$, y en crear potencia recuperable y potencia disipativa.

9.4.4 Consideraciones termodinámicas

1) Puede demostrarse que, bajo condiciones muy generales, la potencia recuperable específica (por unidad de masa) es una diferencial exacta:

$$\frac{1}{\rho}W_R = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma}_R : \mathbf{d} = \frac{dG}{dt} \tag{9.25}$$

En este caso el trabajo recuperable, por unidad de masa, realizado en un ciclo cerrado será nulo (ver Figura 9-4):

$$\int_A^{B\equiv A} \frac{1}{\rho}W_R \, dt = \int_A^{B\equiv A} \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma}_R : \mathbf{d} \, dt = \int_A^{B\equiv A} dG = G_{B\equiv A} - G_A = 0 \tag{9.26}$$

lo que justifica la denominación de *potencia recuperable* para W_R.

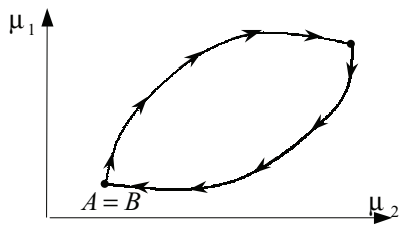


Figura 9-4

2) Por otro lado, el 2º principio de la termodinámica permite demostrar que la potencia disipativa $2W_D$ de la ecuación (9.24) es siempre no negativa:

$$2W_D \geq 0 \qquad 2W_D = 0 \Leftrightarrow \mathbf{d} = 0 \tag{9.27}$$

y que, por tanto, en un ciclo cerrado el trabajo por unidad de masa realizado por las tensiones disipativas, no será, en general, nulo:

$$\int_A^B \frac{1}{\rho} \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_D : \mathbf{d}}_{2W_D>0} \, dt > 0 \tag{9.28}$$

lo que justifica la denominación de *potencia disipativa* (no-recuperable) para $2W_D$. La potencia disipativa es responsable del fenómeno de *disipación* (o de pérdida de energía) en los fluidos.

Ejemplo 9-2 – *Justificar por qué un fluido newtoniano incompresible en movimiento, al que no se proporciona potencia (trabajo por unidad de tiempo) desde el exterior, tiende a reducir su velocidad hasta detenerse.*

Resolución

Al ser el fluido incompresible la potencia recuperable es nula (ver Observación 9-11). Además, se sabe que la potencia disipativa $2W_D$ es siempre positiva (ver ecuación (9.27)). Finalmente, aplicando el teorema de las fuerzas vivas (ver Observación 9-12) se tiene:

$$0 = P_e = \frac{d\mathcal{K}}{dt} + \int_V \underbrace{W_R}_{=0} dV + \int_V 2W_D dV \Rightarrow \frac{d\mathcal{K}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\rho v^2 dV = -\int_V \underbrace{2W_D}_{>0} dV < 0$$

y por tanto el fluido pierde (*disipa*) energía cinética y la velocidad de sus partículas disminuye.

9.4.5 Limitaciones en los valores de las viscosidades

Se ha visto que, por consideraciones termodinámicas, la potencia disipativa $2W_D$ de la ecuación (9.24) es siempre no negativa:

$$\boxed{2W_D = \mathcal{K}\, Tr^2(\mathbf{d}) + 2\mu \mathbf{d}' : \mathbf{d}' \geq 0} \tag{9.29}$$

Esta restricción termodinámica introduce unas limitaciones sobre los valores admisibles de los parámetros de viscosidad $\mathcal{K}$, λ y μ del fluido. En efecto, dado un cierto fluido dicha restricción debe de verificarse para todos los posible movimientos (es decir campos de velocidades $\mathbf{v}$) del mismo y, por lo tanto, para cualquier valor arbitrario del tensor velocidad de deformación $\mathbf{d} = \boldsymbol{\nabla}^S(\mathbf{v})$. Consideremos, en particular, los dos siguientes casos:

a) *El tensor velocidad de deformación* $\mathbf{d}$ *es un tensor puramente esférico.*

En este caso se tendrá

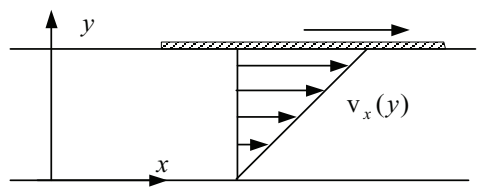
$$Tr(\mathbf{d}) \neq 0; \quad \mathbf{d}' = 0 \Rightarrow 2W_D = \mathcal{K}\, Tr^2(\mathbf{d}) \geq 0 \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{K} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0} \tag{9.30}$$

de manera que únicamente serán factibles valores no negativos de la viscosidad volumétrica $\mathcal{K}$.

b) *El tensor velocidad de deformación* $\mathbf{d}$ *es un tensor puramente desviador.*

En la Figura 9-5 se presenta esquemáticamente uno de estos flujos. En este caso, de la ecuación (9.29) se tendrá:

$$Tr(\mathbf{d}) = 0, \quad \mathbf{d}' \neq 0 \Rightarrow 2W_D = 2\mu \mathbf{d}' : \mathbf{d}' = 2\mu \underbrace{d'_{ij} d'_{ij}}_{>0} \geq 0 \Rightarrow \quad \boxed{\mu \geq 0} \tag{9.31}$$



$$\mathbf{v}(x,y) = \begin{Bmatrix} \mathrm{v}_x(y) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{d}'$$

Figura 9-5

10 Mecánica de fluidos

10.1 Ecuaciones del problema de mecánica de fluidos

Un fluido es un caso particular de medio continuo que se caracteriza por las ecuaciones constitutivas que le son propias. En consecuencia, el problema de mecánica de fluidos vendrá gobernado por las siguientes ecuaciones:

a) Ecuaciones de conservación/balance

1) *Ecuación de continuidad:*

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \qquad \text{(1 ecuación)} \tag{10.1}$$

2) *Ecuación de balance de la cantidad de momento:*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad \text{(3 ecuaciones)} \tag{10.2}$$

3) *Ecuación de balance de energía:*

$$\rho \frac{du}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q} \qquad \text{(1 ecuación)} \tag{10.3}$$

4) *Restricciones impuestas por el segundo principio de la termodinámica*:

$$\begin{array}{ll} \text{Desigualdad de} & \\ \text{Clausius - Plank} & \rightarrow -\rho\left(\dfrac{du}{dt} - \theta\dfrac{ds}{dt}\right) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \geq 0 \\ \text{Desigualdad de la} & \\ \text{conducción de calor} & \rightarrow -\dfrac{1}{\rho\theta^2}\mathbf{q} \cdot \nabla\theta \geq 0 \end{array} \tag{10.4}$$

b) Ecuaciones constitutivas

5) *Ecuación constitutiva termomecánica:*

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \lambda Tr(\mathbf{d})\mathbf{1} + 2\mu\,\mathbf{d} \qquad \text{(6 ecuaciones)} \tag{10.5}$$

6) *Ecuación constitutiva de la entropía*

$$s = s(\mathbf{d}, \rho, \theta) \qquad \text{(1 ecuación)} \tag{10.6}$$

7) *Ecuación de conducción del calor*

$$\mathbf{q} = -k\boldsymbol{\nabla}\theta \qquad \text{(3 ecuaciones)} \qquad (10.7)$$

c) Ecuaciones termodinámicas de estado

8) *Ecuación calórica de estado:*

$$u = u(\rho, \theta) \qquad \text{(1 ecuación)} \qquad (10.8)$$

9) *Ecuación cinética de estado:*

$$F(\rho, p, \theta) = 0 \qquad \text{(1 ecuación)} \qquad (10.9)$$

NOTA

Nótese que el tensor velocidad de deformación $\mathbf{d}$ no se ha considerado como incógnita, al considerarlo implícitamente como una función de la velocidad $\mathbf{v}$.

Las incógnitas del problema que aparecen en las ecuaciones de gobierno son:

$$\left.\begin{array}{l} \rho \rightarrow 1 \text{ incógnita} \\ \mathbf{v} \rightarrow 3 \text{ incógnitas} \\ \boldsymbol{\sigma} \rightarrow 6 \text{ incógnitas} \\ u \rightarrow 1 \text{ incógnita} \\ \mathbf{q} \rightarrow 3 \text{ incógnitas} \\ \theta \rightarrow 1 \text{ incógnita} \\ s \rightarrow 1 \text{ incógnita} \\ p \rightarrow 1 \text{ incógnita} \end{array}\right\} \rightarrow 17 \text{ incógnitas} \qquad (10.10)$$

Se tiene en total un sistema de 17 EDP's con 17 incógnitas que, en general, deberá ser resuelto conjuntamente, es decir, de forma acoplada. Sin embargo, como ya se comentó en el capítulo 5 (apartado 5.13.1), bajo ciertas hipótesis o situaciones, es posible plantear un sistema de ecuaciones más reducido, denominado problema mecánico, y resolver de forma desacoplada para un número más reducido de incógnitas (variables mecánicas).

Consideremos el caso de un *fluido barotrópico* que se caracteriza porque la temperatura no interviene en la ecuación cinética de estado, resultando:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ecuación cinética} \\ \text{de estado} \end{array}\right\} \rightarrow F(\rho, p) = 0 \Rightarrow \rho = \rho(p) \qquad (10.11)$$

que establece que la densidad puede ser descrita mediante, únicamente, la presión termodinámica (ver Figura 10-1). Suponiendo además que la temperatura no interviene en la ecuación constitutiva termomecánica (10.5), podemos definir las *ecuaciones de gobierno del problema mecánico (desacoplado) de un fluido newtoniano* como:

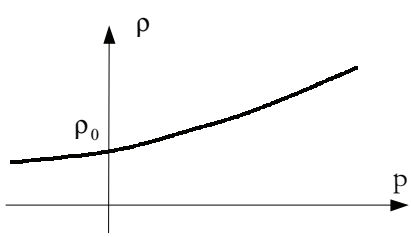


Figura 10-1

1) *Ecuación de continuidad:*

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0 \qquad \text{(1 ecuación)} \qquad (10.12)$$

2) *Ecuación de Cauchy:*

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{b}=\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad \text{(3 ecuaciones)} \qquad (10.13)$$

3) *Ecuación constitutiva mecánica:*

$$\boldsymbol{\sigma}=-p\mathbf{1}+\lambda Tr(\mathbf{d})+2\mu\,\mathbf{d} \qquad \text{(6 ecuaciones)} \qquad (10.14)$$

4) *Ecuación cinética de estado:*

$$\rho=\rho(p) \qquad \text{(1 ecuación)} \qquad (10.15)$$

Las incógnitas del problema que aparecen en las anteriores ecuaciones son:

$$\left.\begin{array}{l}\rho\rightarrow 1\text{ incógnita}\\ \mathbf{v}\rightarrow 3\text{ incógnitas}\\ \boldsymbol{\sigma}\rightarrow 6\text{ incógnitas}\\ p\rightarrow 1\text{ incógnita}\end{array}\right\}\rightarrow 11\text{ incógnitas} \qquad (10.16)$$

Se tiene entonces un sistema reducido de 11 ecuaciones con 11 incógnitas (problema mecánico), que puede ser resuelto de forma desacoplada del resto del problema (problema térmico).

10.2 Hidrostática. Fluidos en reposo

Consideremos a continuación los siguientes casos particulares en función de la velocidad del fluido:

a) Velocidad uniforme: $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\equiv\mathbf{v}(t)$

En este caso, la descripción espacial de la velocidad no depende del punto y es función únicamente del tiempo. Entonces:

$$\mathbf{d}=\boldsymbol{\nabla}^{S}\mathbf{v}=\frac{1}{2}\left[\mathbf{v}\otimes\boldsymbol{\nabla}+\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{v}\right]=\mathbf{0} \qquad (10.17)$$

Considerando además la ecuación constitutiva (10.14):

$$\boldsymbol{\sigma}=-p\mathbf{1}+\lambda\underbrace{Tr(\mathbf{d})}_{=\mathbf{0}}+2\mu\underbrace{\mathbf{d}}_{=\mathbf{0}}\Rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{\sigma}=-p\mathbf{1}} \qquad (10.18)$$

lo que indica que el estado tensional es hidrostático (ver Figura 10-2). Además la presión media $\bar{p}$ y la presión termodinámica p coinciden:

$$Tr(\boldsymbol{\sigma})=-3\bar{p}=-3p\Rightarrow \qquad \boxed{\bar{p}=p} \qquad (10.19)$$

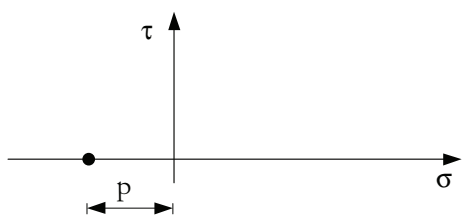


Figura 10-2

b) Velocidad uniforme y estacionaria: $\mathbf{v}(\mathbf{x},t) \equiv cte.$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma} &= -p_0\mathbf{1} \;\Rightarrow\; \bar{p} = p = p_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Hidrostática} \tag{10.20}$$

Este es el caso más general de la *hidrostática*, que viene caracterizado por una aceleración nula (velocidad de cada partícula constante, aunque no necesariamente nula) y las tres presiones (termodinámica p, media $\bar{p}$, e hidrostática p_0) coincidentes.

c) Fluido en reposo: $\mathbf{v}(\mathbf{x},t) \equiv cte. = \mathbf{0}$

Un caso particular de la hidrostática es el de un fluido en reposo con velocidad nula

10.2.1 Ecuaciones de la hidrostática

El problema hidrostático viene gobernado por las siguientes ecuaciones:

1. Ecuación constitutiva:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = -p_0\mathbf{1} \\ \sigma_{ij} = -p_0\delta_{ij} \quad i,j \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{10.21}$$

donde p_0 es la presión hidrostática.

Observación 10-1

Principio de Pascal: En un fluido en reposo la presión es la misma en todas las direcciones.

Este postulado, clásico de la Mecánica de Fluidos, queda garantizado por la estructura esférica del tensor de tensiones en la ecuación (10.21) que garantiza que todas las direcciones son principales (ver Figura 10-3).

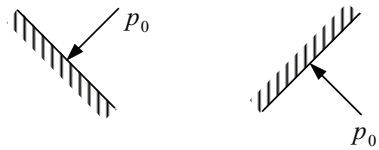


Figura 10-3

2. Ecuación de continuidad:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \\ &\mathbf{v} = cte \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \qquad \boxed{\rho(\mathbf{X},t) = \rho_0(\mathbf{X}) = cte} \tag{10.22}$$

y la densidad de una misma partícula no varía con el tiempo.

3. Ecuación de Cauchy:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\ \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{10.23}$$

Substituyendo la ecuación (10.21) ($\boldsymbol{\sigma} = -p_0 \mathbf{1}$) y (10.22) ($\rho = \rho_0$) en la ecuación (10.23):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla \cdot (-p_0 \mathbf{1}) = -\nabla p_0 \\ [\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}]_j = \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(-p_0 \delta_{ij}\right) = -\dfrac{\partial p_0}{\partial x_j} = -[\nabla p_0]_j \qquad j \in \{1,2,3\} \end{cases} \Rightarrow \tag{10.24}$$

$$\text{Ecuación fundamental de la hidrostática} \rightarrow \begin{cases} -\nabla p_0 + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ -\dfrac{\partial p_0}{\partial x_i} + \rho_0 b_i = 0 \qquad i \in \{1,2,3\} \end{cases} \tag{10.25}$$

10.2.2 Fuerza gravitatoria. Distribución triangular de presión

Consideremos como caso particular, por otra parte muy frecuente, aquél en el que las fuerzas másicas $\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$ son las fuerzas gravitatorias (supuestas constantes en el espacio y en el tiempo, y orientadas en dirección contraria el eje x_3, tal como se muestra en la Figura 10-4).

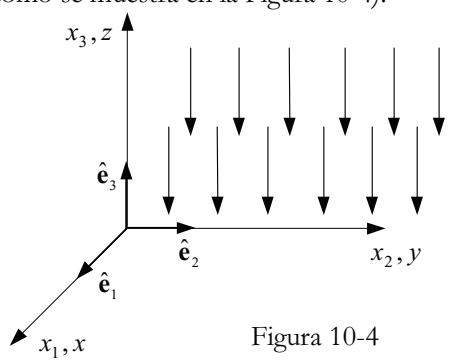


Figura 10-4

Puesto que la aceleración es nula (ver ecuación (10.20)) el problema es cuasiestático y siendo las acciones $\mathbf{b}(\mathbf{x},t) \equiv cte$ independientes del tiempo también lo son las respuestas y, en particular, la presión hidrostática. En consecuencia:

$$p_0(\mathbf{x},t) \equiv p_0(\mathbf{x}) = p_0(x,y,z) \tag{10.26}$$

y la ecuación (10.25) puede ser integrada como sigue:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p_0(x,y,z)}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_0(x,y,z) \equiv p_0(y,z) \\ -\dfrac{\partial p_0(y,z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow p_0(y,z) \equiv p_0(z) \\ -\dfrac{dp_0(z)}{dz} - \rho_0 g = 0 \Rightarrow p_0 = -\rho_0 g z + C \end{cases} \tag{10.27}$$

Para un caso como el indicado en la Figura 10-5, donde la presión en la superficie (cota $z = h$) es considerada nula, la solución (10.26) queda:

$$p_0|_{z=h} = 0 \Rightarrow -\rho_0 g\, h + C = 0 \Rightarrow C = \rho_0 g\, h \Rightarrow \boxed{p_0 = \rho_0 g\,(h - z)} \qquad (10.28)$$

que corresponde a una distribución triangular de presión, tal como se muestra en la Figura 10-5.

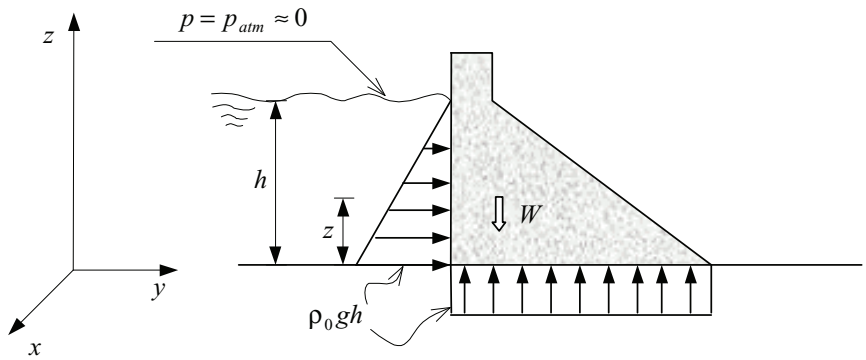


Figura 10-5 – Distribución de la presión sobre una presa de gravedad

10.2.3 Principio de Arquímedes

Principio de Arquímedes:

1) *Todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje hacia arriba igual al peso del volumen del fluido desalojado.*

El clásico Principio puede ser complementado con:

2) *La resultante de dicho empuje pasa por el centro de gravedad del volumen del fluido desalojado.*

Para la demostración del principio de Arquímedes, consideremos las situaciones de la Figura 10-6. Por un lado, en la Figura 10-6 a) se presenta un sólido de volumen V y densidad ρ en el interior de un fluido de densidad ρ_0. El sólido *no está necesariamente en equilibrio*, aunque su velocidad y aceleración se suponen lo suficientemente pequeñas para asegurar un estado hidrostático en el fluido. Por otro parte, en la Figura 10-6 b), se presenta el mismo fluido sin la presencia del sólido, con lo que el volumen ocupado por el mismo en la Figura 10-6 a) es ocupado por idéntico volumen de fluido.

1) *Distribución de presión y tensión en el fluido:*

Utilizando la ecuación fundamental de la hidrostática (10.25), con las fuerzas gravitatorias actuando en la dirección contraria al eje z, se tiene la situación correspondiente a las ecuaciones (10.26) y (10.27) con lo que será válido el resultado (10.28) para ambos casos *a*) y *b*) de la Figura 10-6:

$$\boxed{\begin{array}{l} p_0(z) = \rho_0 g\,(h - z) \\ \boldsymbol{\sigma} = -p_0 \mathbf{1} \end{array}} \qquad (10.29)$$

Nótese que la presión hidrostática y el estado tensional en el fluido, para puntos homólogos del fluido en las casos casos *a*) y *b*) de la Figura 10-6, serán los mismos.

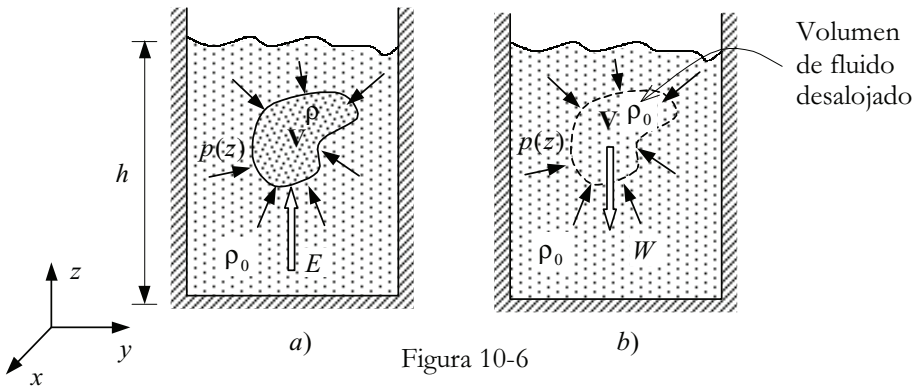


Figura 10-6

2) Empuje sobre el sólido sumergido:

El vector tracción sobre los puntos del contorno del sólido sumergido en la Figura 10-6 *a*) será:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p_0 \mathbf{1} \cdot \mathbf{n} = -p_0 \, \mathbf{n} \tag{10.30}$$

y la resultante $\mathbf{R}$ de las fuerzas que el fluido ejerce sobre el sólido:

$$\mathbf{R} = \int_{\partial V} \mathbf{t} \, dS = \int_{\partial V} - p_0 \mathbf{n} \, dS \tag{10.31}$$

Nótese ahora que, al tratarse de la misma distribución de presión hidrostática, dicha resultante será la misma que se obtendría en el caso *b*) para las fuerzas que el resto del fluido ejerce *sobre el volumen de fluido desalojado*, con la particularidad de que, al manejar en dicho caso una distribución espacialmente continua de la presión p_0 puede aplicarse el teorema de la divergencia (teorema de Stokes) en la ecuación (10.30) resultando:

$$\mathbf{R} = \int_{\partial V} - p_0 \mathbf{n} \, dS = \int_{V} - \nabla p_0 \, dV \tag{10.32}$$

y substituyendo la ecuación (10.25) en la (10.32):

$$\mathbf{R} = \int_{V} - \nabla p_0 \, dV = \int_{V} - \rho_0 \mathbf{b} \, dV = \underbrace{- \int_{V} \rho_0 \mathbf{b} \, dV}_{W \, \hat{\mathbf{e}}_z} = W \, \hat{\mathbf{e}}_z = E \, \hat{\mathbf{e}}_z \tag{10.33}$$

donde E es el empuje hacia arriba sobre el sólido sumergido y W es el peso del volumen del fluido desalojado (ver Figura 10-6 *b*)).

Es decir:

$$\underbrace{\text{Empuje hacia arriba}}_{E} = \underbrace{\text{peso del volumen del fluido desalojado}}_{\text{W}} \tag{10.34}$$

con lo que queda demostrada la primera parte del teorema de Arquímedes.

3) *Recta de aplicación del empuje:*

Consideremos ahora el momento $\mathbf{M}_E^G$ del empuje E con respecto al centro de gravedad, G, del volumen de fluido desalojado (ver Figura 10-7):

NOTA

Sin pérdida de generalidad, puede suponerse el origen del sistema de ejes cartesianos situado en G.

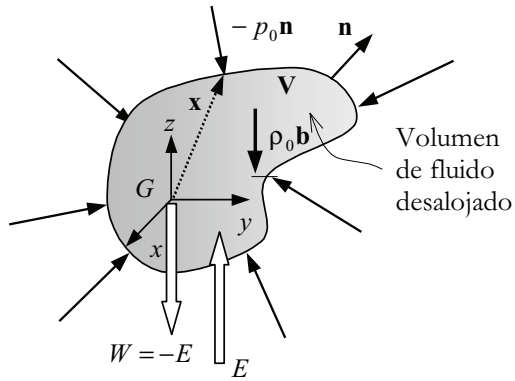


Figura 10-7

$$\begin{cases} \mathbf{M}_E^G = \int_{\partial V} \mathbf{x}\times(-p_0\mathbf{n})dS \overset{\substack{\text{Teorema}\\ \text{de la}\\ \text{diivergencia}}}{=} \int_V \mathbf{x}\times(-p_0\boldsymbol{\nabla})dV = -\int_V \mathbf{x}\times\boldsymbol{\nabla}p_0\,dV \\ \left[\mathbf{M}_E^G\right]_i = -\int_{\partial V} e_{ijk}x_j p_0 n_k dS = -\int_V \frac{\partial}{\partial x_k}\left(e_{ijk}x_j p_0\right)dV = \\ \quad = -\int_V e_{ijk}\frac{\partial x_j}{\partial x_k}p_0 dV - \int_V e_{ijk}x_j\frac{\partial p_0}{\partial x_k}dV = -\int_V \underbrace{e_{ijk}\delta_{jk}}_{e_{ijj}=0}p_0 dV - \\ \quad -\int_V e_{ijk}x_j\frac{\partial p_0}{\partial x_k}dV = -\int_V e_{ijk}x_j\frac{\partial p_0}{\partial x_k}dV \qquad i\in\{1,2,3\} \end{cases} \tag{10.35}$$

y sustituyendo la ecuación fundamental de la hidrostática (10.25) ($\boldsymbol{\nabla}p_0 = \rho_0\mathbf{b}$), en la ecuación (10.35), resulta finalmente:

$$\mathbf{M}_E^G = -\int_V (\mathbf{x}\times\boldsymbol{\nabla}p_0)\,dV = -\underbrace{\int_V (\mathbf{x}\times\rho_0\mathbf{b})\,dV}_{\mathbf{M}_W^G} = -\mathbf{M}_W^G = \mathbf{0} \tag{10.36}$$

donde $\mathbf{M}_W^G$ es el momento del peso del fluido desalojado respecto a su centro de gravedad G, el cual, por definición de centro de gravedad, es nulo. En consecuencia el momento del empuje *E respecto al centro de gravedad del volumen de fluido desalojado* es también nulo y puede concluirse que la recta de aplicación del empuje pasa por dicho centro de gravedad, tal como establece la segunda parte del Principio de Arquímedes.

Ejemplo 10-1 – *Aplicación al estudio de equilibrio de sólidos en flotación. Equilibrio estable e inestable.*

Consideremos un medio en flotación, en equilibrio, y las dos siguientes situaciones:

a) *El centro de gravedad del sólido (centro de carena) está por debajo del centro de gravedad del fluido desalojado (centro de empuje)*, ver Figura 10-8:

En este caso, cualquier perturbación (inclinación) tiende a crear un momento $M = Wd$ de sentido recuperador hacia el estado de equilibrio inicial. Se trata de *equilibrio en flotación estable*.

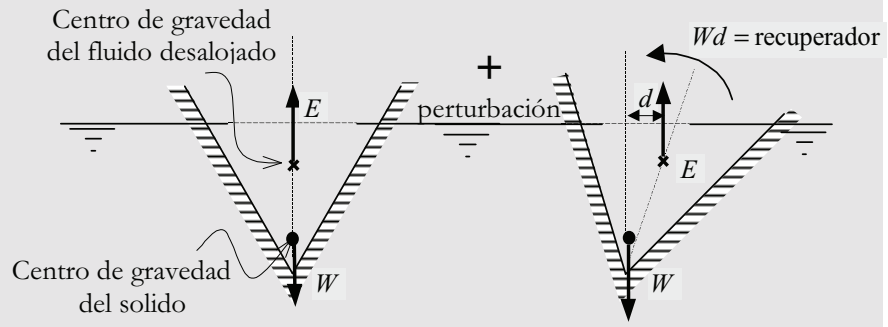


Figura 10-8. Equilibrio en flotación estable

b) *El centro de gravedad del sólido (centro de carena) está por encima del centro de gravedad del fluido desalojado (centro de empuje)* (ver Figura 10-9*)*:

En este caso, cualquier perturbación (inclinación) tiende a crear un momento de sentido volcador $M = Wd$ que aleja al sólido flotante del estado de equilibrio inicial. Se trata de *equilibrio en flotación inestable*.

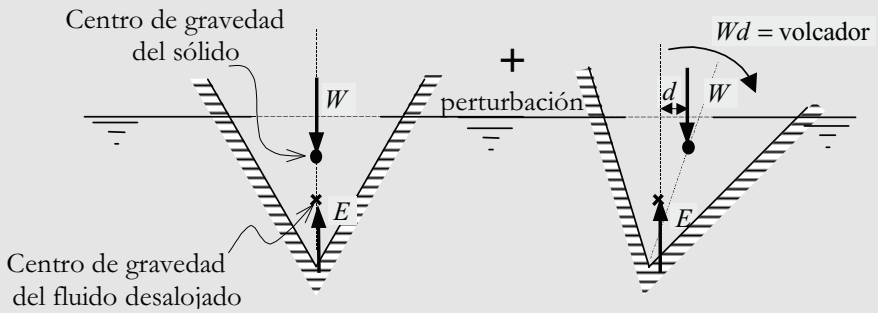


Figura 10-9. Equilibrio en flotación inestable

La colocación de *masas pesantes* (lastres) en la quilla de los barcos responde a la búsqueda de una mejora en la estabilidad en flotación de los mismos.

10.3 Dinámica de fluidos: fluidos perfectos barotrópicos

En el caso más común, la velocidad no es ni uniforme ni estacionaria ($\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x},t)$), por lo que, en general, la aceleración no será nula ($\mathbf{a}(\mathbf{x},t) \neq \mathbf{0}$). Tampoco serán nulos, por consiguiente, ni la divergencia de la velocidad ($\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} \neq 0$) ni el tensor gradiente de la velocidad ($\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v} \overset{not}{=} \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$).

Definición:

Fluido perfecto:

Fluido newtoniano caracterizado porque las viscosidades λ y μ (ver ecuación (10.14)) son nulas.

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \lambda Tr(\mathbf{d}) + 2\mu\,\mathbf{d}\\&\lambda = \mu = 0\end{aligned}\right\} \rightarrow \qquad \boxed{\Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1}}$$
$$\Rightarrow \begin{cases}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\nabla p\\ \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = -p\mathbf{1} : \mathbf{d} = -pTr(\mathbf{d})\end{cases} \tag{10.37}$$

NOTA

No hay que confundir un estado tensional del tipo hidrostático (tensor de tensiones esférico) con un régimen de movimiento hidrostático (velocidad nula o uniforme)

y el estado tensional para un fluido perfecto es del tipo hidrostático.

Definición:

Fluido barotrópico:

La temperatura no interviene en la ecuación cinética de estado (10.9).

$$F(\rho, p, \theta) \equiv F(\rho, p) = 0 \Rightarrow \rho = \rho(p)$$

10.3.1 Ecuaciones del problema

Teniendo en cuenta las hipótesis de fluido perfecto y barotrópico, las ecuaciones de la dinámica de fluidos devienen:

a) Problema mecánico

1) *Ecuación de continuidad:*

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \qquad \text{(1 ecuación)} \tag{10.38}$$

2) *Balance de la cantidad de movimiento* (ecuación de Euler):

$$-\nabla p + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad \text{(3 ecuaciones)} \tag{10.39}$$

3) *Ecuación cinética de estado:*

$$\rho = \rho(p) \qquad \text{(1 ecuación)} \tag{10.40}$$

Se trata de un problema con cinco ecuaciones y cinco incógnitas $(\rho, \mathbf{v}, p)$ que puede resolverse de forma desacoplada del problema térmico.

b) Problema térmico

1) *Ley de Fourier*

$$\mathbf{q} = -\mathsf{k}\nabla\theta \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{q} = -\mathsf{k}\nabla\cdot(\nabla\theta) = -\mathsf{k}\,\nabla^2\theta \qquad \text{(3 ecuaciones)} \tag{10.41}$$

2) *Ecuación de la energía*

$$\rho\frac{du}{dt} = \underbrace{-p\nabla\cdot\mathbf{v}}_{\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}} + \rho r + \underbrace{\mathsf{k}\,\nabla^2\theta}_{-\nabla\cdot\mathbf{q}} \qquad \text{(1 ecuación)} \tag{10.42}$$

3) *Ecuación calórica de estado*

$$u = u(\rho,\theta) \qquad \text{(1 ecuación)} \tag{10.43}$$

Se trata de un problema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas $(\mathbf{q}(\mathbf{x},t),\theta(\mathbf{x},t),u(\mathbf{x},t))$ que puede calcularse *una vez resuelto el problema mecánico* y conocido el campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, de densidad $\rho(\mathbf{x},t)$ y de presión $p(\mathbf{x},t)$.

Observación 10-2

Un formato general del problema de mecánica de fluidos incluye a la conductividad térmica k entre las viscosidades (en un sentido generalizado) del problema. La definición de un *fluido perfecto* como un *fluido sin viscosidad* supone, en este contexto, la anulación de la conductividad térmica ($\mathsf{k}=0$), con lo que la ecuación (10.41) conduce a $\mathbf{q} = -\mathsf{k}\nabla\theta = \mathbf{0}$ y el problema térmico se reduce a las ecuaciones (10.42) y (10.43).

10.3.2 Resolución del problema mecánico bajo fuerzas másicas potenciales. Trinomio de Bernouilli

Consideremos ahora el problema mecánico para el caso particular de *fuerzas másicas potenciales* (las fuerzas másicas derivan de un potencial ϕ):

$$\boxed{\text{Fuerzas másicas potenciales} \rightarrow \mathbf{b}(\mathbf{x},t) = -\nabla\phi(\mathbf{x},t)} \tag{10.44}$$

Para el caso particular de un potencial gravitatorio con el eje de actuación de la gravedad actuando en el sentido opuesto al eje z se tiene:

$$\boxed{\phi(x,y,z,t) = gz \Rightarrow \mathbf{b} = -\nabla\phi \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}} \tag{10.45}$$

Observación 10-3

Lema 1:

Para un fluido barotrópico $(\rho = \rho(p))$ existe una función $\mathbb{P}(\mathbf{x},t) = \hat{\mathbb{P}}(p(\mathbf{x},t))$, que cumple:

$$\boxed{\nabla p = \rho\nabla\mathbb{P}}$$

Demostración:

Definiendo la función $\mathbb{P}(\mathbf{x},t)$ mediante:

$$\mathbb{P}(\mathbf{x},t)=\hat{\mathbb{P}}(p(\mathbf{x},t))=\int_0^p \frac{1}{\rho(\bar{p})}\,d\bar{p} \tag{10.46}$$

se cumplirá:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \mathbb{P}(\mathbf{x},t)}{\partial x_i}=\frac{\partial \hat{\mathbb{P}}}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x_i}\\ &[\nabla \mathbb{P}]_i=\underbrace{\frac{\partial \hat{\mathbb{P}}}{\partial p}}_{\frac{1}{\rho(p)}}[\nabla \mathrm{p}]_i=\frac{1}{\rho(p)}[\nabla \mathrm{p}]_i \qquad i\in\{1,2,3\}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \nabla\mathbb{P}=\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{10.47}$$

Observación 10-4

Lema 2:

$$\boxed{\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}=2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}+\nabla\left(\frac{1}{2}\mathrm{v}^2\right)}$$

donde $2\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\mathbf{v}$ es el vector vorticidad.

Demostración:

RECORDATORIO

Se utilizan aquí los siguientes resultados obtenidos anteriormente (ver capítulo 2)

a) $\mathrm{w}_{ji}=-\mathrm{w}_{ij}=$

$=\left[\nabla^a\mathbf{v}\right]_{ji}=$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_i}-\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_j}\right]$

b) $\mathrm{w}_{ij}=-e_{ijk}\omega_k$

c) $\mathrm{v}^2=|\mathbf{v}|^2=\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$

$$\begin{aligned}&(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v})_j=\mathrm{v}_i\frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_i}=\mathrm{v}_i\underbrace{\left[\frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_i}-\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_j}\right]}_{2\mathrm{w}_{ji}}+\mathrm{v}_i\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_j}=\\ &=2\mathrm{v}_i\underbrace{\mathrm{w}_{ji}}_{-\mathrm{w}_{ij}}+\mathrm{v}_i\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_j}=-2\mathrm{v}_i\mathrm{w}_{ij}+\mathrm{v}_i\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_j}=\underbrace{2e_{ijk}\mathrm{v}_i\omega_k}_{e_{jki}\mathrm{v}_i\omega_k}+\mathrm{v}_i\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_j}=\\ &=\underbrace{2e_{jki}\mathrm{v}_i\omega_k}_{[2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}]_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{1}{2}\underbrace{\mathrm{v}_i\mathrm{v}_i}_{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\mathrm{v}^2}\Big)=[2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}]_j+\left[\nabla\left(\frac{1}{2}\mathrm{v}^2\right)\right]_j \quad j\in\{1,2,3\}\Rightarrow\\ &\boxed{\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}=2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}+\nabla\left(\frac{1}{2}\mathrm{v}^2\right)}\end{aligned} \tag{10.48}$$

Considerando ahora la ecuación de Euler (10.39):

$$-\nabla p+\rho\mathbf{b}=\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\Rightarrow-\frac{1}{\rho}\nabla p+\mathbf{b}=\frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{10.49}$$

y substituyendo las ecuaciones (10.45) y (10.47) en la ecuación (10.49):

$$-\nabla\mathbb{P}-\nabla\phi=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}+\nabla\left(\frac{1}{2}\mathrm{v}^2\right) \tag{10.50}$$

donde se ha tenido en cuenta el resultado (10.48). La ecuación (10.50) puede ser reescrita ahora como:

$$-\left[\nabla\mathbb{P}+\nabla\phi+\nabla\left(\frac{1}{2}\mathrm{v}^2\right)\right]=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}\Rightarrow \tag{10.51}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ecuación de movimiento para}\\ \text{un fluido perfecto barotrópico}\\ \text{bajo fuerzas másicas potenciales}\end{array}\right\}\rightarrow -\nabla\underbrace{\left[\mathbb{P}+\phi+\frac{1}{2}\mathrm{v}^2\right]}_{\substack{\text{Trinomio de}\\ \text{Bernouilli}}}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} \tag{10.52}$$

La ecuación (10.52) es la forma particular que adopta el balance de la cantidad de movimiento (ecuación de Euler (10.39) para fluidos perfectos, barotrópicos bajo fuerzas másicas potenciales.

10.3.3 Solución en régimen estacionario

La resolución del problema mecánico (10.38) a (10.40) tendrá en general un *régimen transitorio* en el que la descripción espacial de las variables mecánicas evoluciona con el tiempo, y un *régimen estacionario,* en el que dicha descripción espacial es, aproximadamente, constante a lo largo del tiempo (ver Figura 10-10).

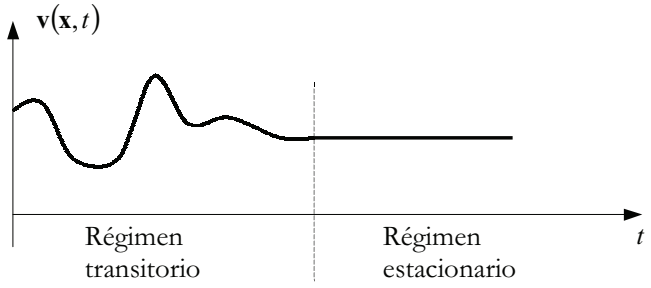


Figura 10-10 – Régimen transitorio y estacionario

Consideremos ahora la ecuación del movimiento (10.52) en *régimen estacionario*:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=\mathbf{0}\quad\Rightarrow-\nabla\left[\mathbb{P}+\phi+\frac{1}{2}\mathrm{v}^2\right]=2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} \tag{10.53}$$

RECORDATORIO

En régimen estacionario las trayectorias y las líneas de corriente coinciden.

y una línea de corriente Γ: $\mathbf{x}=\mathbf{x}(s)$ parametrizada en función de su longitud de arco s (ver Figura 10-11). Proyectando (multiplicando) la ecuación (10.51) en la dirección de la tangente $\mathbf{t}$ a la línea de corriente, tendremos:

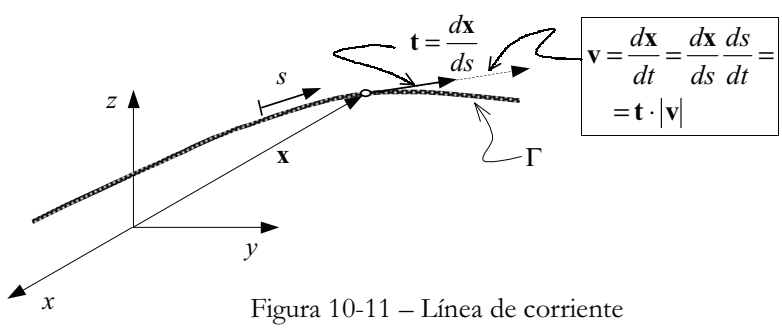


Figura 10-11 – Línea de corriente

$$-\nabla\underbrace{\left[\mathbb{P}+\phi+\frac{1}{2}\mathrm{v}^2\right]}_{M(\mathbf{x})}=2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}\qquad\Rightarrow-(\nabla M)\cdot\underbrace{\frac{\mathbf{v}}{\frac{d\mathbf{x}}{ds}\frac{ds}{dt}}}_{=\mathbf{v}}=\underbrace{(2\mathbf{w}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}}_{=\mathbf{0}}=\mathbf{0}\Rightarrow \tag{10.54}$$

$$\left.\begin{aligned}&\nabla M(\mathbf{x}(s))\cdot\frac{d\mathbf{x}}{ds}=\frac{dM}{ds}=0\\&\frac{\partial M(\mathbf{x}(s))}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds}=\frac{dM}{ds}=0\end{aligned}\right\}\ \forall\mathbf{x}\in\Gamma\Rightarrow\quad\boxed{M(\mathbf{x})=ctte\quad\forall\mathbf{x}\in\Gamma} \tag{10.55}$$

y la ecuación (10.55) puede escribirse:

$$\boxed{\left[\mathbb{P}+\phi+\frac{1}{2}\mathrm{v}^2\right](\mathbf{x})=ctte.\quad\forall\mathbf{x}\in\Gamma} \tag{10.56}$$

que establece que *el trinomio de Bernouilli permanece constante sobre una misma línea de corriente* Γ.

Observación 10-5

Nótese ahora que la ecuación (10.56) ya no es una ecuación diferencial, sino una ecuación (escalar) algebraica ya integrada. Dicha ecuación permite, por consiguiente, obtener una de las incógnitas del problema mecánico conocidas las demás.

10.3.3.1 Solución en régimen estacionario para fluido incompresible y fuerzas másicas gravitatorias

Consideremos ahora el caso particular de fluido barotrópico que ocurre cuando:

a) El fluido es *incompresible*

$$\rho=\rho(p)=\rho_0=ctte \tag{10.57}$$

En este caso la función $\mathbb{P}(p)$ de la ecuación (10.46) puede integrarse, resultando:

$$\mathbb{P}(\mathbf{x},t))=\int_0^p\frac{1}{\rho(\overline{p})}d\overline{p}=\frac{1}{\rho_0}\int_0^p d\overline{p}=\frac{p}{\rho_0} \tag{10.58}$$

b) Las fuerzas másicas potenciales son del tipo gravitatorio

De acuerdo con la ecuación (10.45):

$$\phi=gz\qquad\mathbf{b}=-\nabla\phi=\begin{bmatrix}0\\0\\-g\end{bmatrix} \tag{10.59}$$

Substituyendo las ecuaciones (10.58) y (10.59) en la expresión del trinomio de Bernouilli (10.56), se tiene:

$$\frac{p}{\rho_0}+gz+\frac{1}{2}\mathrm{v}^2=ctte.\quad\Rightarrow z+\frac{p}{\rho_0 g}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{v}^2}{g}\overset{def}{=}H=ctte\qquad\forall\mathbf{x}\in\Gamma \tag{10.60}$$

Los términos de la ecuación (10.59) tienen dimensiones de longitud (altura) y pueden interpretarse como:

Teorema de Bernouilli

$$\underbrace{z}_{\text{Altura geométrica}} + \underbrace{\frac{p}{\rho_0 g}}_{\text{Altura piezométrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{v^2}{g}}_{\text{Altura energética}} \overset{def}{=} \underbrace{H}_{\text{Altura total}} = ctte \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \tag{10.61}$$

RECORDATORIO

La palabra *piezométrica* proviene del prefijo piezo = presión.

Observación 10-6

Teorema de Bernouilli:

La ecuación (10.61) constituye el llamado Teorema de Bernouilli (para un fluido perfecto, incompresible, bajo cargas gravitatorias y en régimen estacionario) que establece que *la altura geométrica más la altura piezométrica más la altura energética* es constante *en todos los puntos de una misma línea de corriente* (ver Figura 10-2).

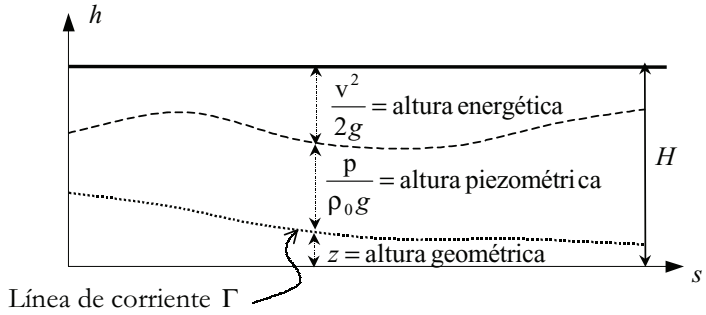


Figura 10-12

Observación 10-7

El agua es generalmente considerada en ingeniería como un fluido perfecto e incompresible, y la ciencia que la estudia se denomina *hidráulica*. Puesto que, en general las fuerzas másicas son de tipo gravitatorio, el Teorema de Bernouilli es aplicable en general en la *resolución de problemas estacionarios en hidráulica.*

Ejemplo 10-2 – *Para el depósito de agua de la figura, calcular la velocidad de vertido, en régimen estacionario, por un pequeño orificio lateral situado a una distancia* h *del nivel superior de agua.*

Resolución:

Se trata de un fluido perfecto e incompresible en régimen estacionario bajo carga gravitatoria y es, por tanto, aplicable el Teorema de Bernouilli. Consideremos una línea de corriente que va desde un cierto punto **A**, de la superficie, al punto **B** del orificio de salida (ver (Figura 10-13)).

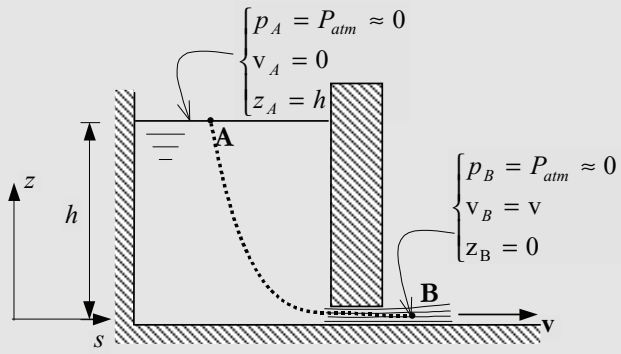


Figura 10-13

Aplicando el Teorema de Bernouilli entre los puntos **A** y **B** (considerando que la velocidad en la superficie libre del depósito es prácticamente nula, si su diámetro es mucho mayor que el del orificio de salida, y despreciando la presión atmosférica $P_{atm} \approx 0$):

$$\underbrace{z_A}_{=h} + \frac{p_A}{\underbrace{\rho_0 g}_{=0}} + \frac{1}{2}\frac{v_A^2}{\underbrace{g}_{=0}} = \underbrace{z_B}_{=0} + \frac{p_B}{\underbrace{\rho_0 g}_{=0}} + \frac{1}{2}\frac{v_B^2}{g}$$

$$h + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{g} \Rightarrow \qquad \boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

10.3.4 Solución en régimen transitorio

En régimen transitorio las variables mecánicas (su descripción espacial) dependen del tiempo (ver Figura 10-10). El punto de partida para la resolución del problema será la ecuación de balance de la cantidad de movimiento (10.52):

$$\boxed{-\nabla\left[\mathbb{P} + \phi + \frac{1}{2}v^2\right] = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}} \qquad (10.62)$$

En algunos casos la solución de dicha ecuación en régimen transitorio es particularmente sencilla. A continuación se verán algunos de dichos casos.

10.3.4.1 Flujo potencial (irrotacional)

Se considera el caso de:

- fluido perfecto
- fuerzas másicas potenciales
- flujo irrotacional.

Definición:

Flujo irrotacional:

Se dice que el movimiento (flujo) de un cierto fluido es irrotacional (o potencial) si el rotacional del campo de velocidades es nulo en cualquier punto del mismo.

En otras palabras, para un flujo irrotacional el vector vorticidad es nulo:

$$\boxed{\text{Flujo irrotacional} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{0} \end{array}\right\} \quad \forall \mathbf{x} \quad \forall t} \tag{10.63}$$

NOTA

Puede demostrarse que, dado un campo vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ irrotacional, es decir, cumpliendo $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, existe una función escalar $\chi(\mathbf{x},t)$ (función potencial) tal que $\mathbf{v} = \nabla\chi(\mathbf{x},t)$. Evidentemente , puesto que $\nabla \times \nabla(\bullet) \equiv \mathbf{0}$, se cumple que $\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times \nabla\chi(\mathbf{x},t) = \mathbf{0}$

Si el flujo es irrotacional, de la ecuación (10.63) se infiere que existe una función escalar (denominada potencial de velocidades $\chi(\mathbf{x},t)$) que cumple:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \nabla\chi(\mathbf{x},t) \tag{10.64}$$

Nótese que, en este caso, el campo *vectorial* $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ queda determinado en función del potencial *escalar* de velocidades $\chi(\mathbf{x},t)$ (que pasa a ser la incógnita primal del problema). Substituyendo las condiciones (10.63) y (10.64) en la ecuación (10.62) se tiene:

$$-\nabla\left[\mathbb{P} + \phi + \frac{1}{2}\mathrm{v}^2\right] = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\underbrace{\boldsymbol{\omega}}_{=\mathbf{0}} \times \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\chi(\mathbf{x},t)) = \nabla\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right) \Rightarrow \tag{10.65}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \nabla\underbrace{\left[\mathbb{P} + \phi + \frac{1}{2}\mathrm{v}^2 + \frac{\partial \chi}{\partial t}\right]}_{M(\mathbf{x},t)} = \nabla M(\mathbf{x},t) = \mathbf{0} & \\ & \forall \mathbf{x} \quad \forall t \\ \frac{\partial M(\mathbf{x},t)}{\partial x_i} = 0 \qquad i \in \{1,2,3\} & \end{array}\right. \tag{10.66}$$

ecuación que puede ser trivialmente integrada llegándose a:

$$M(\mathbf{x},t) = \mathbb{P} + \phi + \frac{1}{2}\mathrm{v}^2 + \frac{\partial \chi}{\partial t} = \varphi(t) \tag{10.67}$$

Definiendo un potencial de velocidades modificado $\overline{\chi}(\mathbf{x},t)$ de la forma:

$$\overline{\chi}(\mathbf{x},t) \overset{def}{=} \chi(\mathbf{x},t) - \int_0^t \varphi(\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \nabla\overline{\chi} = \nabla\chi = \mathbf{v}(\mathbf{x},t) \\ \frac{\partial \overline{\chi}}{\partial t} = \frac{\partial \chi}{\partial t} - \varphi(t) \end{array}\right. \tag{10.68}$$

y substituyendo las ecuaciones (10.68) en la (10.67):

$$\mathbb{P} + \phi + \frac{1}{2}\mathrm{v}^2 + \underbrace{\frac{\partial \chi}{\partial t} - \varphi(t)}_{\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial t}} = 0 \Rightarrow \qquad \boxed{\mathbb{P} + \phi + \frac{1}{2}(\nabla\overline{\chi})^2 + \frac{\partial \overline{\chi}}{\partial t} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \quad \forall t} \tag{10.69}$$

que es la ecuación diferencial de los *transitorios hidráulicos*.

El problema mecánico queda entonces definido por:

1) *Ecuación de continuidad*

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{d\rho}{dt} + \rho\underbrace{\nabla \cdot (\nabla\overline{\chi})}_{\nabla^2\overline{\chi}} = 0 \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla^2\overline{\chi} = 0} \tag{10.70}$$

2) Balance de la cantidad de movimiento (ecuación de los transitorios hidráulicos)

$$\boxed{\mathbb{P}(\rho, p) + \phi + \frac{1}{2}(\nabla\overline{\chi})^2 + \frac{\partial\overline{\chi}}{\partial t} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \quad \forall t} \tag{10.71}$$

3) Ecuación cinética de estado

$$\rho = \rho(p) \tag{10.72}$$

que constituyen un sistema de tres ecuaciones escalares con tres incógnitas ($p(\mathbf{x},t)$, $\rho(\mathbf{x},t)$ y $\overline{\chi}(\mathbf{x},t)$) que puede ser integrado en un dominio de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$. Una vez conocido el potencial $\overline{\chi}(\mathbf{x},t)$ puede calcularse el campo de velocidades mediante:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \nabla\overline{\chi}(\mathbf{x},t) \tag{10.73}$$

10.3.4.2 Flujo potencial e incompresible

Se considera ahora el caso de:

- fluido perfecto
- fuerzas másicas potenciales
- flujo irrotacional (potencial)
- flujo incompresible

NOTA

Se define aquí el operador diferencial *Laplaciano de* $(\bullet)$ como:

$$\Delta(\bullet) = \nabla \cdot \nabla(\bullet) \overset{not}{=} = \nabla^2(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x_i \, \partial x_i}$$

Al tratarse de un flujo incompresible de las ecuaciones (10.46) y (10.70):

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0 \rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(p) = \int_0^p \frac{1}{\rho(\overline{p})}\, d\overline{p} = \frac{p}{\rho_0} \\ \nabla^2\overline{\chi} \overset{not}{=} \Delta\overline{\chi} = 0 \end{cases} \tag{10.74}$$

y las ecuaciones del problema mecánico (10.70) a (10.72) resultan ser:

1) Ecuación de continuidad

$$\boxed{\Delta\overline{\chi} = \frac{\partial^2\overline{\chi}}{\partial x_i \, \partial x_i} = 0} \tag{10.75}$$

2) Balance de la cantidad de movimiento (ecuación de los transitorios hidráulicos)

$$\boxed{\frac{p}{\rho_0} + \phi + \frac{1}{2}(\nabla\overline{\chi})^2 + \frac{\partial\overline{\chi}}{\partial t} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \quad \forall t} \tag{10.76}$$

que constituyen un sistema de *dos ecuaciones* escalares con dos incógnitas ($p(\mathbf{x},t)$ y $\overline{\chi}(\mathbf{x},t)$) que puede ser integrado en un dominio de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$. En régimen

estacionario el término $\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial t} = 0$ y desaparece cualquier derivada temporal en el sistema, por lo que éste puede ser integrado en $\mathbb{R}^3$.

10.4 Dinámica de fluidos: fluidos viscosos (newtonianos)

Consideremos ahora el problema general descrito por las ecuaciones (10.1) a (10.9):

Continuidad	$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$	(1 ec.)	(10.77)
Balance de la cantidad de movimiento	$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$	(3 ec.)	(10.78)
Balance de energía	$\rho \frac{du}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q}$	(1 ec.)	(10.79)
Ecuación constitutiva mecánica	$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \lambda Tr(\mathbf{d})\mathbf{1} + 2\mu\,\mathbf{d}$	(6 ec.)	(10.80)
Ecuación constitutiva de la entropía	$s = s(\mathbf{d}, \theta, \rho)$	(1 ec.)	(10.81)
Ecuación de conducción del calor	$\mathbf{q} = -k\nabla\theta$	(3 ec.)	(10.82)
Ecuación calórica de estado	$u = u(\rho, \theta)$	(1 ec.)	(10.83)
Ecuación cinética de estado	$F(\rho, p, \theta) = 0$	(1. ec)	(10.84)

Tabla 10-1 Ecuaciones del problema de Mecánica de Fluidos

que constituyen un sistema con 17 ecuaciones y 17 incógnitas. Dicho sistema es demasiado grande para ser tratado eficazmente y se plantea encontrar un sistema de ecuaciones reducido que permita una resolución más simple.

10.4.1 Ecuación de Navier-Stokes

Esencialmente es la ecuación del movimiento (10.78) expresada únicamente en función del campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ y de presión $p(\mathbf{x}, t)$.

Observación 10-8

Lema 1:

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \frac{1}{2}\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{2}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

donde $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ es el tensor velocidad de deformación.

Demostración:

$$\left.\begin{aligned}[\nabla\cdot\mathbf{d}]_j &= \frac{\partial}{\partial x_i}d_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_i}\right)\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{v}_i}{\partial x_i \partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{v}_j}{\partial x_i \partial x_i} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_i}}_{\nabla\cdot\mathbf{v}}+\frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial^2 \mathrm{v}_j}{\partial x_i \partial x_i}}_{\Delta \mathrm{v}_j} = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla\cdot\mathbf{v})}_{[\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})]_j}+\frac{1}{2}\underbrace{\Delta \mathrm{v}_j}_{[\Delta\mathbf{v}]_j} = \\ &= \left[\frac{1}{2}\Delta\mathbf{v}+\frac{1}{2}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})\right]_j \qquad j\in\{1,2,3\}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \tag{10.85}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{d} = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{v}+\frac{1}{2}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})} \tag{10.86}$$

Observación 10-9

Lema 2:

Dada una función escalar $\alpha(\mathbf{x},t)$ se cumple:

$$\boxed{\nabla\cdot(\alpha\mathbf{1}) = \nabla\alpha}$$

Demostración:

$$\left[\nabla\cdot(\alpha\mathbf{1})\right]_i = \frac{\partial(\alpha\delta_{ij})}{\partial x_j} = \delta_{ij}\frac{\partial\alpha}{\partial x_j} = \frac{\partial\alpha}{\partial x_i} = [\nabla\alpha]_i \qquad i\in\{1,2,3\} \Rightarrow \tag{10.87}$$

$$\boxed{\nabla\cdot(\alpha\mathbf{1}) = \nabla\alpha} \tag{10.88}$$

Substituyendo la ecuación constitutiva (10.80) en la ecuación (10.78) y teniendo en cuenta las ecuaciones (10.86) y (10.88):

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= -p\mathbf{1}+\lambda Tr(\mathbf{d})\mathbf{1}+2\mu\,\mathbf{d}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{b} &= \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} = -\nabla p+\lambda\underbrace{\nabla(Tr(\mathbf{d}))}_{\nabla[\nabla\cdot\mathbf{v}]}+\mu\Delta\mathbf{v}+\mu\nabla[\nabla\cdot\mathbf{v}]\\ \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{b} = -\nabla p+(\lambda+\mu)\nabla[\nabla\cdot\mathbf{v}]+\mu\Delta\mathbf{v}+\rho\mathbf{b} = \rho\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}\end{cases} \tag{10.89}$$

Ecuaciones de Navier - Stokes

$$\begin{cases}-\nabla p+(\lambda+\mu)\nabla[\nabla\cdot\mathbf{v}]+\mu\Delta\mathbf{v}+\rho\mathbf{b} = \rho\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}\\ -\dfrac{\partial p}{\partial x_i}+(\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2 \mathrm{v}_j}{\partial x_i\partial x_j}+\mu\dfrac{\partial^2 \mathrm{v}_i}{\partial x_j\partial x_j}+\rho b_i = \rho\dfrac{d\mathrm{v}_i}{dt} \quad i\in\{1,2,3\}\end{cases} \tag{10.90}$$

10.4.2 Ecuación de la energía

Se trata de eliminar $\boldsymbol{\sigma}$ y $\mathbf{q}$ de la ecuación (10.79) substituyendo en la misma las ecuaciones (10.80) y (10.82). Para ello recordando la expresión de la potencia tensional para un fluido newtoniano (ver capítulo 9):

$$\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d} = W_R + 2W_D = -p\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} + \mathcal{K}\,Tr^2(\mathbf{d}) + 2\mu\,\mathbf{d}':\mathbf{d}' \tag{10.91}$$

donde $\mathbf{d}'$ es la parte desviadora del tensor velocidad de deformación, y la ley de Fourier:

$$\mathbf{q} = -k\boldsymbol{\nabla}\theta \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(k\boldsymbol{\nabla}\theta) \tag{10.92}$$

Substituyendo ahora en la ecuación (10.79), se tiene:

$$\rho\frac{du}{dt} = \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d} + \rho\, r - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} \Rightarrow \tag{10.93}$$

Ecuación de la energía

$$\begin{cases} \rho\dfrac{du}{dt} = -p\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} + \rho r + \boldsymbol{\nabla}\cdot(k\boldsymbol{\nabla}\theta) + \overbrace{\mathcal{K}\,Tr^2(\mathbf{d}) + 2\mu\,\mathbf{d}':\mathbf{d}'}^{2W_D} \\ \rho\dfrac{du}{dt} = -p\dfrac{\partial v_i}{\partial x_i} + \rho r + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(k\dfrac{\partial\theta}{\partial x_i}\right) + \mathcal{K}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)^2 + 2\mu\, d'_{ij}\, d'_{ij} \end{cases} \tag{10.94}$$

10.4.3 Ecuaciones de gobierno del problema de mecánica de fluidos

Considerando las versiones simplificadas del balance de la cantidad de movimiento (ecuaciones de Navier-Stokes (10.90) y de la energía (10.94)) el problema de la Tabla 10-1 puede ser reducido al de la Tabla 10-2, que constituyen un sistema de siete EDP's con siete incógnitas ($\rho(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, $p(\mathbf{x},t)$, $u(\mathbf{x},t)$, $\theta(\mathbf{x},t)$) que debe ser resuelto en un dominio de $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+$.

Continuidad	$\dfrac{d\rho}{dt} + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0$	(1 ec.)	(10.95)
Balance de la cantidad de movimiento (Navier-Stokes)	$-\boldsymbol{\nabla}p + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}[\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}] + \mu\Delta\mathbf{v} + \rho\mathbf{b} = \rho\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$	(3 ec.)	(10.96)
Balance de energía	$\rho\dfrac{du}{dt} = -p\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} + \rho r + \boldsymbol{\nabla}\cdot(k\boldsymbol{\nabla}\theta) + + \mathcal{K}\,Tr^2(\mathbf{d}) + 2\mu\,\mathbf{d}':\mathbf{d}'$	(1 ec.)	(10.97)
Ecuación calórica de estado	$u = u(\rho,\theta)$	(1 ec.)	(10.98)
Ecuación cinética de estado	$F(\rho, p, \theta) = 0$	(1 ec.)	(10.99)

Tabla 10-2 Ecuaciones de gobierno del problema de mecánica de fluidos

Para el caso particular de *régimen barotrópico* ($\rho = \rho(p)$) puede desacoplarse la parte mecánica de la parte térmica en las ecuaciones (10.77) a (10.84),

resultando *el problema mecánico* de la Tabla 10-3 con cinco ecuaciones y cinco incógnitas ($\rho(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, $p(\mathbf{x},t)$).

Continuidad	$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{v}=0$	(1 ec.)	(10.100)
Balance de la cantidad de movimiento (Navier-Stokes)	$-\nabla p+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})+\mu\Delta\mathbf{v}+\rho\mathbf{b}=\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}$	(3 ec.)	(10.101)
Ecuación cinética de estado	$\rho=\rho(p)$	(1 ec.)	(10.102)

Tabla 10-3 Ecuaciones del problema mecánico para régimen barotrópico

10.4.4 Interpretación física de las ecuaciones de Navier-Stokes y de la energía

Consideremos las ecuaciones de Navier-Stokes (10.90):

$$\begin{cases} -\nabla p+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})+\mu\Delta\mathbf{v}+\rho\mathbf{b}-\rho\underbrace{\frac{d\mathbf{v}}{dt}}_{\mathbf{a}}=\mathbf{0} \\ -\frac{\partial p}{\partial x_i}+\left[(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})+\mu\Delta\mathbf{v}\right]_i+\rho\, b_i-\rho\, a_i=0 \quad i\in\{1,2,3\} \end{cases} \tag{10.103}$$

Cada uno de los términos de la ecuación (10.103) puede ser entendido como una componente de un sistema de fuerzas (por unidad de volumen) que actúa sobre un diferencial de volumen del fluido en movimiento:

$$\underbrace{-\nabla p}_{\substack{\text{Fuerzas debidas al gradiente de presiones}}} - \underbrace{-\left[(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})+\mu\Delta\mathbf{v}\right]}_{\substack{\text{Fuerzas viscosas ejercidas por contacto entre partículas (=0 cuando } \lambda=\mu=0)}} + \underbrace{\rho\,\mathbf{b}}_{\substack{\text{Fuerzas másicas}}} + \underbrace{-\rho\,\mathbf{a}}_{\substack{\text{Fuerzas de inercia}}} = \mathbf{0} \tag{10.104}$$

En la Figura 10-4 puede apreciarse la proyección en la dirección x_i de cada una de las mencionadas componentes.

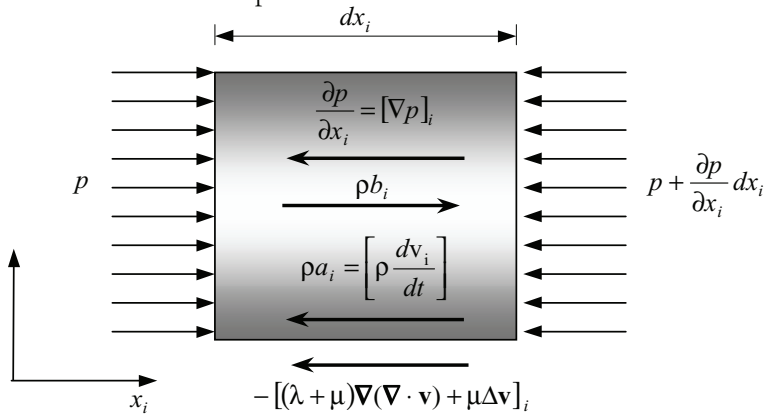


Figura 10-14

La *ecuación de la energía* (10.94) también puede ser interpretada como se indica en la Tabla 10-4.

$$\rho\frac{du}{dt} = -p\nabla\cdot\mathbf{v} + \rho r + \nabla\cdot(k\nabla\theta) + \overbrace{\mathcal{K}\,Tr^2(\mathbf{d}) + 2\mu\,\mathbf{d}':\mathbf{d}'}^{2W_D}$$

$\rho\frac{du}{dt}$	$= \frac{\text{Variación de energía interna}}{\text{u. de volumen - u. de tiempo}}$
$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\frac{d(dV)}{dt}}{dV}$	$= \frac{\text{Variación de volumen}}{\text{u. de volumen - u. de tiempo}}$
$-p\nabla\cdot\mathbf{v} = -\frac{\frac{p\,d(dV)}{dt}}{dV}$	$= \frac{\text{Trabajo mecánico de la presión termodinámica}}{\text{u. de volumen - u. de tiempo}}$ (ver Figura 10-15)
$\rho r + \nabla\cdot(k\nabla\theta)$	$= \frac{\text{Calor generado por las fuentes internas y la conducción}}{\text{u. de volumen - u. de tiempo}}$
$2W_D = \boldsymbol{\sigma}_D : \mathbf{d}$	$= \text{Pot. disipativa} = \frac{\text{Trabajo mecánico de las fuerzas viscosas}}{\text{u. de volumen - u. de tiempo}}$

Tabla 10-4 Interpretación física de la ecuación de la energía

RECORDATORIO

$$\frac{d(dV)}{dt} = (\nabla\cdot\mathbf{v})\,dV$$

(ver capítulo 2 apartado 2.14.3)

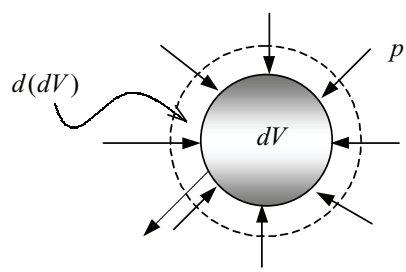


Figura 10-15

10.4.5 Reducción del problema general a casos particulares

Las ecuaciones de gobierno de la Mecánica de Fluidos de la Tabla 10-2, pueden simplificarse para ciertos casos que son de particular interés en la Ingeniería.

10.4.5.1 Fluidos incompresibles

En este caso ocurre:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= 0\\ \frac{dp}{dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\rho = \rho_0 = ctte.\\ \nabla\cdot\mathbf{v} = Tr(\mathbf{d}) = 0\end{cases} \qquad (10.105)$$

y substituyendo las ecuaciones (10.105) en la Tabla 10-2 se obtienen las ecuaciones de gobierno de la Tabla 10-5.

Problema Mecánico	*Continuidad*	$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}=0$
	Ecuaciones de Navier-Stokes	$-\boldsymbol{\nabla}p+\mu\,\Delta\mathbf{v}+\rho_0\mathbf{b}=\rho_0\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$
Problema Térmico	*Balance de energía*	$\rho_0\dfrac{du}{dt}=\rho_0 r+\boldsymbol{\nabla}\cdot(k\boldsymbol{\nabla}\theta)+2\mu\,\mathbf{d}':\mathbf{d}'$
	Ecuación calórica de estado	$u=u(\rho_0,\theta)$
Ecuación constitutiva		$\boldsymbol{\sigma}=-p\mathbf{1}+2\mu\,\mathbf{d}$

Tabla 10-5 Fluidos newtonianos incompresibles. Ecuaciones de gobierno

10.4.5.2 Fluidos con viscosidad volumétrica nula (Fluidos de Stokes)

En este caso:

$$\mathcal{K}=\lambda+\frac{2}{3}\mu=0\Rightarrow\ \lambda=-\frac{2}{3}\mu\Rightarrow\ \lambda+\mu=\frac{1}{3}\mu \tag{10.106}$$

$$2W_D=\underbrace{\mathcal{K}}_{=0}Tr^2(\mathbf{d})+2\mu\,\mathbf{d}':\mathbf{d}'=2\mu\,\mathbf{d}':\mathbf{d}' \tag{10.107}$$

y substituyendo las ecuaciones (10.106) y (10.107) en la Tabla 10-2 se obtienen las ecuaciones de gobierno de la Tabla 10-6.

Continuidad	$\dfrac{d\rho}{dt}+\rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}=0$
Ecuaciones de Navier-Stokes	$-\boldsymbol{\nabla}p+\ \dfrac{1}{3}\mu\boldsymbol{\nabla}[\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}]+\mu\Delta\mathbf{v}+\rho\mathbf{b}=\rho\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$
Balance de energía	$\rho\dfrac{du}{dt}=-p\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}+\rho r+\boldsymbol{\nabla}\cdot(k\boldsymbol{\nabla}\theta)+2\mu\,\mathbf{d}':\mathbf{d}'$
Ecuación calórica de estado	$u=u(\rho,\theta)$
Ecuación cinética de estado	$F(\rho,p,\theta)=0$
Ecuación constitutiva	$\boldsymbol{\sigma}=-p\mathbf{1}-\dfrac{2}{3}\mu\,Tr(\mathbf{d})\mathbf{1}+2\mu\,\mathbf{d}$

Tabla 10-6 Fluidos de Stokes. Ecuaciones de gobierno

10.4.5.3 Fluidos perfectos

Para fluidos perfectos (sin viscosidad) $\lambda=\mu=\mathcal{K}=0$. Substituyendo dicha condición en la Tabla 10-2, se obtiene el problema de la Tabla 10-7.

Continuidad	$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
Balance de la cantidad de movimiento (Ecuación de Euler)	$-\nabla p + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$
Balance de energía	$\rho \frac{du}{dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho r$
Ecuación calórica de estado	$u = u(\rho, \theta)$
Ecuación cinética de estado	$F(\rho, p, \theta) = 0$
Ecuación constitutiva	$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1}$

Tabla 10-7 Fluidos perfectos. Ecuaciones de gobierno

10.4.5.4 Hidrostática

En este caso se tiene (ver ecuaciones (10.20)):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{0} \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad ; \quad \rho = \rho_0 \quad ; \quad p = p_0 \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma} = -p_0 \mathbf{1} \qquad (10.108)$$

por lo que las ecuaciones de la Tabla 10-2 se reducen a las de la Tabla 10-8.

Problema Mecánico	*Balance de la cantidad de movimiento (ecuación fundamental de la hidrostática)*	$-\nabla p_0 + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0}$
Problema Térmico	*Balance de energía*	$\rho_0 \frac{du}{dt} = \rho_0 r + \nabla \cdot (k \nabla \theta)$
	Ecuación calórica de estado	$u = u(\rho_0, \theta)$
Ecuación constitutiva		$\boldsymbol{\sigma} = -p_0 \mathbf{1}$

Tabla 10-8 Hidrostática. Ecuaciones de gobierno

10.5 Condiciones de contorno en la mecánica de fluidos

Las ecuaciones de gobierno del problema de Mecánica de Fluidos, presentadas en apartados anteriores, necesitan las adecuadas condiciones de contorno para ser resueltas correctamente. En general, en los problemas de Mecánica de Fluidos se utiliza la *descripción espacial* (o euleriana) y se analiza un determinado *volumen de control* (fijo en el espacio), en cuyo contorno se aplican las condiciones de contorno espaciales. Aunque dichas condiciones de contorno son muy variadas, y frecuentemente dependientes del tipo de problema, en los siguientes apartados se presenta un resumen de las más comunes.

10.5.1 Condiciones de contorno en velocidades

a) Velocidad prescrita

En ciertas partes $\Gamma_{\bar{v}}$ del contorno del volumen de control V que se analiza, las velocidades son conocidas (ver Figura 10-16).

$$\boxed{\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t) \quad \forall \mathbf{x}\in\Gamma_{v}} \tag{10.109}$$

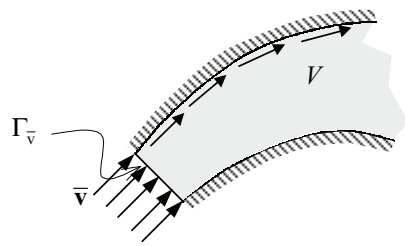


Figura 10-16 – Condiciones de contorno en velocidades

b) Condición de impenetrabilidad

Normalmente, parte del contorno del volumen de control V está constituido por paredes impermeables, Γ_{v_n}, que se suponen impenetrables por el fluido de su interior. La expresión matemática de dicha situación es la denominada *condición de impenetrabilidad,* que establece que la velocidad relativa del fluido, $\mathbf{v}_r$, respecto a la pared impermeable (supuesta móvil con velocidad $\mathbf{v}^*$) *en la dirección normal al contorno* debe ser nula (ver Figura 10-17):

$$v_n(\mathbf{x},t)=\underbrace{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}_{fluido}=\underbrace{\mathbf{v}^*\cdot\mathbf{n}}_{pared} \qquad \forall \mathbf{x}\in\Gamma_{v_n} \Rightarrow \tag{10.110}$$

$$\boxed{\mathbf{v}_r\cdot\mathbf{n}=(\mathbf{v}-\mathbf{v}^*)\cdot\mathbf{n}=0 \qquad \forall \mathbf{x}\in\Gamma_{v_n}} \tag{10.111}$$

Para el caso particular de contorno fijo la condición (10.111), se reduce a $(\mathbf{v}^*=0)\Rightarrow \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0 \quad \forall \mathbf{x}\in\Gamma_{v_n}$.

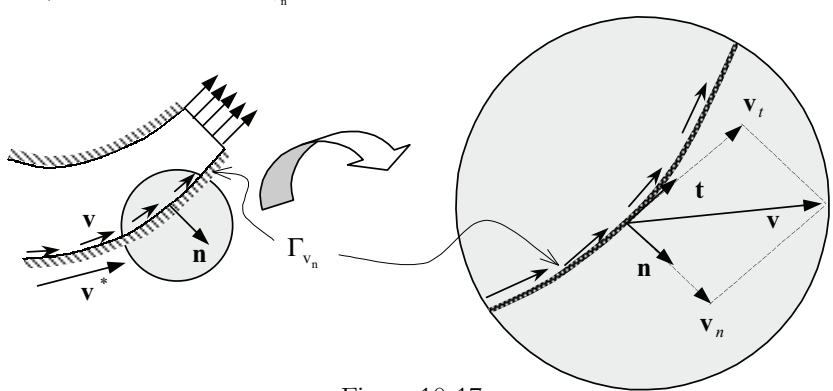


Figura 10-17

Observación 10-10

La condición de impenetrabilidad suele aplicarse para *fluidos perfectos* (sin viscosidad) en los que se supone que la componente tangencial de la velocidad relativa fluido-pared $\mathbf{v}_t$ (ver Figura 10-17) es no nula.

c) Condición de adherencia

Si el *fluido* es *viscoso* suele imponerse que, en las paredes impermeables, no solamente se anula la componente normal de la velocidad relativa fluido-pared, sino que, por efecto de la viscosidad, el fluido se *adhiere* a la pared (ver Figura 10-8), por lo que la velocidad relativa fluido-pared $\mathbf{v}_r$ es nula:

$$\mathbf{v}_r(\mathbf{x},t)=\mathbf{v}-\mathbf{v}^*=\mathbf{0}\quad \forall \mathbf{x}\in\Gamma_v \Rightarrow \boxed{\mathbf{v}=\mathbf{v}^*\qquad \forall \mathbf{x}\in\Gamma_v} \tag{10.112}$$

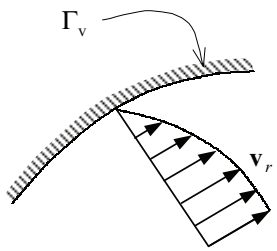


Figura 10-18

10.5.2 Condiciones de contorno en tracciones (o en presiones)

En ciertas partes Γ_σ del contorno puede prescribirse el vector de tracciones $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{t}$ (ver Figura 10-19).

$$\boxed{\mathbf{t}(\mathbf{x},t)=\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{t}^*(\mathbf{x},t)\quad \forall \mathbf{x}\in\Gamma_\sigma} \tag{10.113}$$

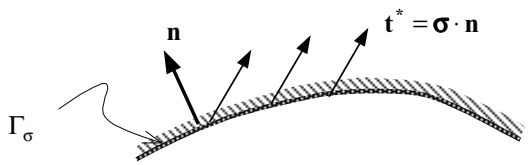


Figura 10-19

En ciertas circunstancias se prescribe solamente una parte del vector de tracciones como es *la presión termodinámica*. En efecto, para un fluido newtoniano se tiene:

$$\boldsymbol{\sigma}=-p\mathbf{1}+\lambda Tr(\mathbf{d})\mathbf{1}+2\mu\mathbf{d}\Rightarrow\quad \mathbf{t}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}=-p\,\mathbf{n}+\lambda Tr(\mathbf{d})\mathbf{n}+2\mu\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} \tag{10.114}$$

y la ecuación (10.114) pone de manifiesto que la presión termodinámica p es una parte de la componente normal del vector de tracciones $\mathbf{t}$. La prescripción de la presión termodinámica sobre una parte del contorno Γ_p se escribe:

$$\boxed{p(\mathbf{x},t) = p^*(\mathbf{x},t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_p} \tag{10.115}$$

10.5.3 Condiciones de contorno mixtas

En ciertos casos (como en las secciones de entrada o de salida de tuberías) se prescribe la presión (una parte de la componente *normal* de la tracción) y las componentes *tangenciales* de la velocidad (que se suponen nulas, ver Figura 10-20).

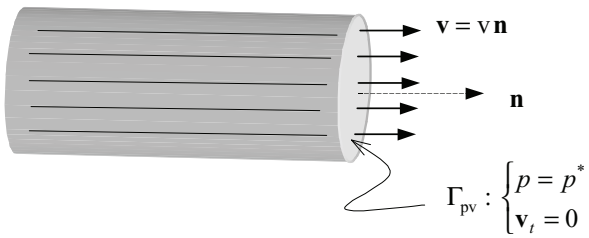


Figura 10-20

10.5.4 Condiciones de contorno sobre superficies libres

Definición

Superficie libre:

Es la superficie de contacto entre el aire (ambiente) y un fluido (generalmente el agua).

NOTA

En general, en los problemas de Mecánica de Fluidos en los que aparecen superficies libres, la posición de las mismas no se conoce y las características geométricas de dicha superficie pasan a ser una incógnita del problema.

Ejemplos de superficie libre son la superficie del mar (ver Figura 10-21) o la superficie que separa la parte saturada de la no saturada en un talud o en una presa de materiales sueltos (ver Figura 10-22).

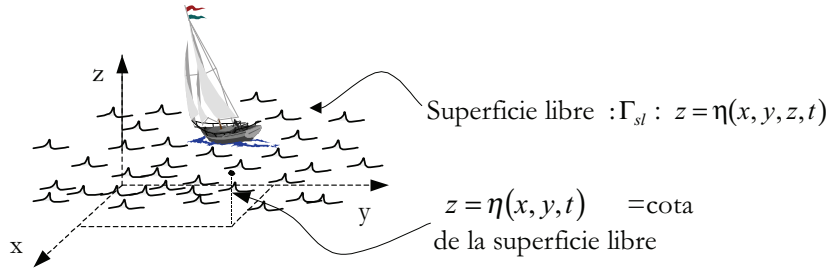


Figura 10-21 – Superficie libre del mar

Una hipótesis con claro sentido físico frecuentemente realizada sobre la superficie libre es que se trata de *una superficie material* (constituida siempre por las mismas partículas). Dicha hipótesis establece implícitamente ciertas condiciones de contorno sobre el campo de velocidades en la superficie material Γ_{sl}. En efecto, considerando la superficie libre de la Figura 10-21:

$$\Gamma_{sl} := \{\mathbf{x} \mid \phi(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z},\mathrm{t}) \equiv z - \eta(x,y,t) = 0\} \tag{10.116}$$

e imponiendo el carácter material de la misma (derivada material nula, ver Capítulo 1, apartado 1.11):

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi = -\frac{\partial\eta}{\partial t} - \mathrm{v_x}\frac{\partial\eta}{\partial x} - \mathrm{v_y}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \mathrm{v_z}\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial z}}_{=1} = 0 \Rightarrow \tag{10.117}$$

$$\boxed{\mathrm{v_z}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \mathrm{v_x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \mathrm{v_y}\frac{\partial\eta}{\partial y} \quad \forall\mathbf{x}\in\Gamma_{sl}} \tag{10.118}$$

condición que establece una dependencia de la componente vertical de la velocidad $\mathrm{v_z}$ con respecto a las demás componentes $\mathrm{v_x}$ y $\mathrm{v_y}$.

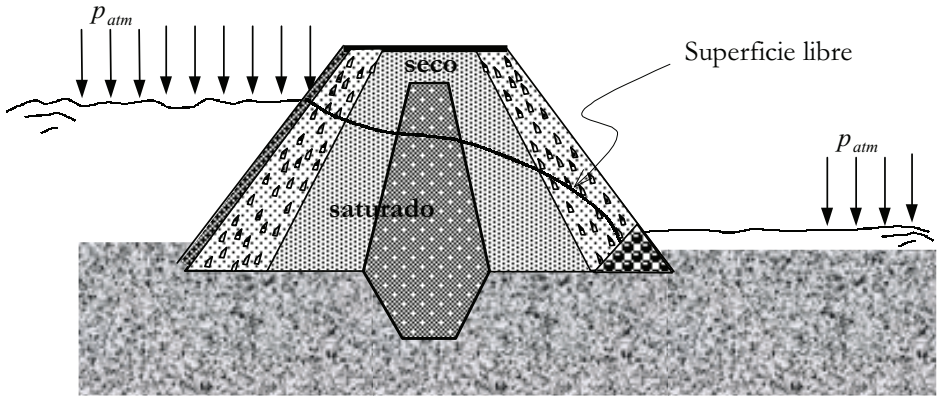


Figura 10-22 – Presa de materiales sueltos

NOTA

En general, se deprecia el valor de la presión atmosférica ($P_{atm} \approx 0$)

Otra condición de contorno frecuentemente establecida sobre las superficies libres es que en las mismas la presión termodinámica es conocida e igual a la presión atmosférica:

$$\boxed{p(\mathbf{x},t) = P_{atm} \quad \forall\mathbf{x}\in\Gamma_{sl}} \tag{10.119}$$

La ecuación (10.119) permite, en ciertos casos, identificar la posición de la superficie libre (una vez conocido el campo de presiones) como el lugar geométrico de los puntos del fluido en los que la presión es igual a la presión atmosférica:

$$\boxed{\text{Ecuación de la superfice libre} \rightarrow \quad \Gamma_{sl} := \{\mathbf{x} \mid p(\mathbf{x},t) - P_{atm} = 0\}} \tag{10.120}$$

10.6 Flujo laminar y flujo turbulento

10.6.1 Flujo laminar

Las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos descritas en los apartados anteriores son válidas para cierto rango del movimiento de los fluidos que se denomina flujo (o régimen) laminar. En esencia el flujo laminar viene caracterizado

físicamente por el hecho de que el fluido se mueve en capas paralelas que no se mezclan entre si (ver Figura 10-23).

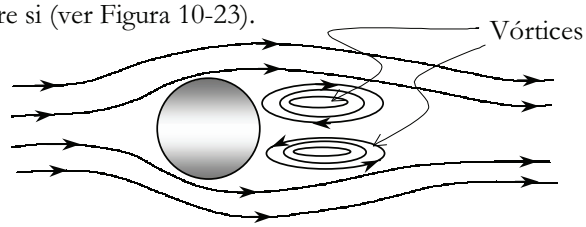


Figura 10-23. Flujo laminar alrededor de un obstáculo

El carácter laminar del flujo viene generalmente identificado por el denominado número de Reynolds R_e:

$$\begin{cases} \text{Numero de Reynolds} \rightarrow R_e \overset{def}{=} \dfrac{V \times L}{\nu} \\ V = \text{velocidad característica del fluido} \\ \text{L} = \text{longitud característica del dominio analizado} \\ \nu = \text{viscosidad cinemática } (\nu = \dfrac{\mu}{\rho}). \end{cases} \tag{10.121}$$

de tal forma que valores pequeños del número de Reynolds caracterizan dichos flujos laminares.

10.6.2 Flujo Turbulento

Cuando la velocidad aumenta y la viscosidad disminuye, el número de Reynolds (10.121) aumenta. Para valores crecientes de dicho número se observa que el flujo laminar inicial se desordena y se vuelve altamente inestable. El flujo puede entonces ser entendido como una situación en la que tanto la tensión como la velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, en un punto dado del espacio, fluctúan rápidamente y de forma aleatoria a lo largo del tiempo y alrededor de un valor medio $\overline{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t)$ (ver Figura 10-24). Esta situación se define como de *flujo* (o régimen) *turbulento*.

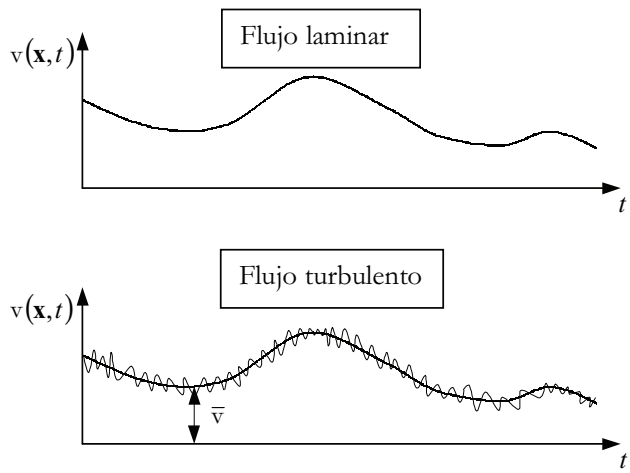


Figura 10-24

Aunque las ecuaciones del problema de Mecánica de Fluidos en general, y las ecuaciones de Navier-Stokes en particular, siguen siendo válidas en régimen

turbulento, ciertas circunstancias (como las dificultades del tratamiento matemático del problema y la imposibilidad de caracterizar experimentalmente las rápidas fluctuaciones de las variables del mismo) imponen un tratamiento singular para el flujo turbulento. La caracterización matemática del régimen turbulento se hace entonces a través de los denominados *modelos de turbulencia*. En esencia, dichos modelos se basan en aislar los valores medios de los campos de velocidades y presiones de sus fluctuaciones y en obtener ecuaciones de gobierno del problema en términos de aquellos.

11 Principios variacionales

11.1 Preliminares

El cálculo variacional es una herramienta matemática que permite trabajar con lo que se denomina *forma integral* o *forma débil* de las ecuaciones diferenciales de gobierno de un problema. Dado un sistema de ecuaciones diferenciales, que deben verificarse en forma local (punto a punto) en un cierto dominio, los principios variacionales permiten obtener una formulación integral (global, en el dominio) o formulación débil, cuya imposición, sin embargo, garantiza el cumplimiento de aquellas ecuaciones diferenciales. Su interés reside en que dichas formulaciones integrales son especialmente apropiadas para el tratamiento y resolución del problema por métodos numéricos.

11.1.1 Funcionales. Derivadas funcionales

Definición:

Funcional $\mathbb{F}(\mathbf{u})$*:* aplicación de un espacio de funciones $\mathbb{X}$, sobre el cuerpo de los reales:

$$\mathbb{F}(\mathbf{u}):\mathbb{X}\to\mathbb{R}$$

siendo $\mathbb{X}:=\{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{u}(\mathbf{x}):\mathbb{R}^3\supset\Omega\to\mathbb{R}^m\}$.

En otras palabras, el funcional $\mathbb{F}(\mathbf{u})$ es una aplicación que, a cada elemento $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ (una función escalar, vectorial o tensorial definida en un dominio Ω de $\mathbb{R}^3$, o en general, de $\mathbb{R}^n$) de un espacio de funciones $\mathbb{X}$ le hace corresponder un número real.

Con un cierto abuso del lenguaje, podría decirse que un funcional $\mathbb{F}(\mathbf{u})$ es una *función escalar cuyos argumentos son funciones* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Ejemplo 11-1 – Consideremos un intervalo $\Omega\equiv[a,b]\in\mathbb{R}$ y el espacio $\mathbb{X}$ constituido por todas las funciones reales de variable real en el intervalo $[a,b]$ $(u(x):[a,b]\to\mathbb{R})$ con derivadas primeras $u'(x)$ integrables en dicho intervalo. Ejemplos de posibles funcionales son:

$$\mathbb{F}(u)=\int_a^b u(x)dx \qquad \mathbb{G}(u)=\int_a^b u'(x)dx \qquad \mathbb{H}(u)=\int_a^b F[x,u(x),u'(x)]dx$$

Definición:

Sea $\mathbb{X} := \{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{u}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \to \mathbb{R}^n\}$ un espacio de funciones (escalares, vectoriales o tensoriales) sobre un dominio Ω y un funcional $\mathbb{F}(\bullet) : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$.

Sean dos funciones $\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{X}$ y sea $\varepsilon \in \mathbb{R}$ un parámetro (perturbación). Consideremos la función $\mathbf{u} + \varepsilon\,\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{X}$, que puede interpretarse como una *función perturbada* de la función $\mathbf{u}$ en la dirección $\boldsymbol{\eta}$. Se define la *variación de Gateaux (o derivada de Gateaux) del funcional* $\mathbb{F}(\mathbf{u})$ *en la dirección de* $\boldsymbol{\eta}$ como:

$$\boxed{\delta\mathbb{F}(\mathbf{u};\boldsymbol{\eta}) \overset{def}{=} \frac{d}{d\varepsilon}\mathbb{F}(\mathbf{u}+\varepsilon\,\boldsymbol{\eta})\Big|_{\varepsilon=0}}$$

Observación 11-1

A menudo se denota la dirección respecto a la cual se toma la variación como $\boldsymbol{\eta} \overset{not}{=} \delta\mathbf{u}$ y así se va a hacer frecuentemente en lo que sigue. No debe confundirse $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$ con la diferencial $d\mathbf{u}(\mathbf{x})$ (en el sentido del cálculo infinitesimal) de la función $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Sin embargo, la obtención de la variación de Gateaux de un funcional tiene en ciertos casos *el mismo formalismo* que la diferenciación ordinaria de funciones y de ahí el consiguiente peligro de confusión (ver Ejemplo 11-2).

Ejemplo 11-2 – *Sea el funcional* $\mathbb{F}(\mathbf{u}) \overset{def}{=} \int_\Omega \phi(\mathbf{u})\,d\Omega + \int_{\partial\Omega} \varphi(\mathbf{u})\,d\Gamma$. *Obtener su derivada de Gateaux.*

Resolución:

$$\delta\mathbb{F}(\mathbf{u};\delta\mathbf{u}) = \frac{d}{d\varepsilon}\mathbb{F}(\mathbf{u}+\varepsilon\delta\mathbf{u})\,\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\int_\Omega \phi(\mathbf{u}+\varepsilon\delta\mathbf{u})\;d\Omega\Big|_{\varepsilon=0} + \frac{d}{d\varepsilon}\int_{\partial\Omega} \varphi(\mathbf{u}+\varepsilon\delta\mathbf{u})\;d\Gamma\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \left[\int_\Omega \frac{\partial\phi(\mathbf{u}+\varepsilon\delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}} \cdot \underbrace{\frac{d(\mathbf{u}+\varepsilon\delta\mathbf{u})}{d\varepsilon}}_{\delta\mathbf{u}} d\Omega\right]_{\varepsilon=0} + \left[\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi(\mathbf{u}+\varepsilon\delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}} \cdot \underbrace{\frac{d(\mathbf{u}+\varepsilon\delta\mathbf{u})}{d\varepsilon}}_{\delta\mathbf{u}} d\Gamma\right]_{\varepsilon=0} \Rightarrow$$

$$\boxed{\delta\left[\int_\Omega \phi(\mathbf{u})\,d\Omega + \int_{\partial\Omega} \varphi(\mathbf{u})\,d\Gamma\right] = \int_\Omega \frac{\partial\phi(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}} \cdot \delta\mathbf{u}\;d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}} \cdot \delta\mathbf{u}\;d\Gamma}$$

y puede apreciarse la semejanza formal, en este caso, de la obtención de la derivada de Gateaux del funcional con la diferenciación de funciones.

Consideremos ahora un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, su contorno $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ con $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \varnothing$ (ver Figura 11-1) y el espacio $\mathbb{V}$ de las funciones $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ definidas sobre Ω y *que toman un determinado valor* $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ *en el contorno* Γ_u *:*

$$\mathbb{V} := \{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \;\mid\; \mathbf{u}(\mathbf{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^m \quad ; \quad \mathbf{u}(\mathbf{x})\big|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u} = \mathbf{u}^*(\mathbf{x})\} \tag{11.1}$$

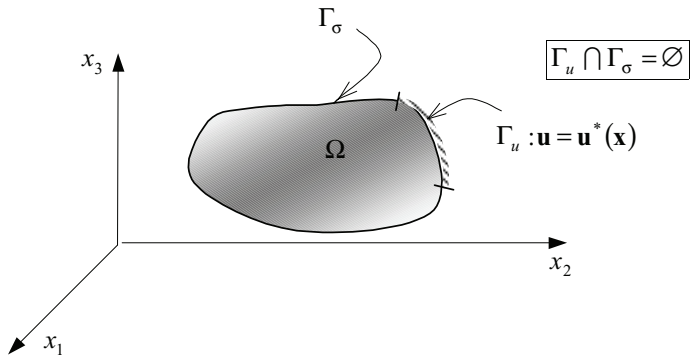


Figura 11-1

Observación 11-2

Con respecto a la obtención de la derivada de Gateaux, una condición, que se establece en la propia definición, sobre la perturbación $\boldsymbol{\eta} \equiv \delta\mathbf{u}$ es que la función perturbada $\mathbf{u} + \varepsilon\,\delta\mathbf{u}$ pertenezca al mismo espacio de funciones $\mathbb{V}$ ($\mathbf{u} + \varepsilon\,\delta\mathbf{u} \in \mathbb{V}$). En este caso si $\mathbf{u} + \varepsilon\,\delta\mathbf{u} \in \mathbb{V}$:

$$\Rightarrow (\mathbf{u} + \varepsilon\,\delta\mathbf{u})\big|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u} = \mathbf{u}^* \Rightarrow \underbrace{\mathbf{u}\big|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u}}_{\mathbf{u}^*} + \varepsilon\,\delta\mathbf{u}\big|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u} = \mathbf{u}^* \Rightarrow \varepsilon\,\delta\mathbf{u}\big|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u} = \mathbf{0}$$

y la perturbación $\delta\mathbf{u}$ debe satisfacer: $\boxed{\delta\mathbf{u}\big|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u} = \mathbf{0}}$

Sobre la base de la familia de funciones (11.1) consideremos ahora la siguiente familia de funcionales:

$$\boxed{\mathbb{F}(\mathbf{u}) = \int_\Omega \phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \nabla\mathbf{u})\, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \nabla\mathbf{u})\, d\Gamma \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{V}} \tag{11.2}$$

siendo ϕ y φ funciones suficientemente regulares para ser integrables en los dominios Ω y Γ_σ, respectivamente. Supondremos además que, mediante las adecuadas operaciones algebraicas, la derivada de Gateaux de $\mathbb{F}(\mathbf{u})$ puede escribirse como:

$$\boxed{\delta\mathbb{F}(\mathbf{u};\delta\mathbf{u}) = \int_\Omega \mathbb{E}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \nabla\mathbf{u}) \cdot \delta\mathbf{u}\; d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbb{T}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \nabla\mathbf{u}) \cdot \delta\mathbf{u} \quad d\Gamma \qquad \begin{cases} \forall \delta\mathbf{u} \\ \delta\mathbf{u}\big|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u} = \mathbf{0} \end{cases}} \tag{11.3}$$

Ejemplo 11-3 – *Sea el funcional:*

$$\mathbb{F}(u)=\int_a^b \phi[x,u(x),u'(x)]dx \quad \text{con} \quad u(x)\big|_{x=a}=u(a)=p$$

Obtener su derivada de Gateaux en el formato de la ecuación (11.3).

Resolución:

Se trata de un caso particular del funcional (11.2) reducido a una dimensión con $\varphi\equiv 0,\ \Omega\equiv(a,b),\ \Gamma_u\equiv a \quad \Gamma_\sigma\equiv b$.

Perturbando la función $u(x)$ y reemplazando en el funcional:

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}u(x)\to u(x)+\varepsilon\,\eta(x)\\ u'(x)\to u'(x)+\varepsilon\,\eta'(x)\end{array}\right.\\ \forall\eta(x)\equiv\delta u(x) \quad |\ \eta(a)\overset{not}{=}\eta_a=0\end{array}\right\}\Rightarrow \mathbb{F}(u+\varepsilon\eta)=\int_a^b \phi[x,\ u(x)+\varepsilon\eta,\ \ u'(x)+\varepsilon\eta']dx$$

y la consiguiente derivada de Gateaux será:

$$\delta\mathbb{F}(u;\eta)=\frac{d}{d\varepsilon}\mathbb{F}(u+\varepsilon\ \eta)\big|_{\varepsilon=0}=\int_a^b\left[\frac{\partial\phi}{\partial u}\eta+\frac{\partial\phi}{\partial u'}\eta'\right]dx$$

Por otra parte, la anterior expresión puede ser integrada por partes como sigue:

$$\int_a^b\frac{\partial\phi}{\partial u'}\eta'dx=\left[\frac{\partial\phi}{\partial u'}\eta\right]_{x=a}^{x=b}-\int_a^b\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u'}\right)\eta\right]dx=$$

$$=\left.\frac{\partial\phi}{\partial u'}\right|_{x=b}\eta_b-\left.\frac{\partial\phi}{\partial u'}\right|_{x=a}\underbrace{\eta_a}_{=0}-\int_a^b\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u'}\right)\eta\right]dx=\left.\frac{\partial\phi}{\partial u'}\right|_{x=b}\eta_b-\int_a^b\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u'}\right)\eta\right]dx\Rightarrow$$

$$\delta\mathbb{F}(u;\underbrace{\delta u}_{\tilde{\eta}})=\int_a^b\left[\frac{\partial\phi}{\partial u}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u'}\right)\right]\delta u\,dx+\left.\frac{\partial\phi}{\partial u'}\right|_{x=b}\delta u_b$$

expresión que es un caso particular de la ecuación (11.3) con:

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{E}(x,u,,u')\equiv\dfrac{\partial\phi}{\partial u}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial u'}\right) \quad \forall x\in(a,b)\\ \mathbb{T}(x,u,u')\equiv\left.\dfrac{\partial\phi}{\partial u'}\right|_{x=b}\end{array}}$$

11.1.2 Extremos de funcionales. Principios variacionales. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Sea $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función real de una variable real. Decimos que la función presenta un mínimo en $x=x_0$ si:

$$f(x_0)\le f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{11.4}$$

Es bien sabido que una condición necesaria para que f presente un extremo (mínimo, máximo o punto de silla) en $x=x_0$ es que:

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \overset{not}{=} f'(x_0)=0 \tag{11.5}$$

Este concepto puede ser generalizado a los funcionales en un espacio de funciones. Dado un funcional $\mathbb{F}(\mathbf{u}):\mathbb{V}\to\mathbb{R}$, decimos que dicho funcional presenta un mínimo en $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ si:

$$\mathbb{F}(\mathbf{u})\le\mathbb{F}(\mathbf{v}) \quad \forall\mathbf{v}\in\mathbb{V} \tag{11.6}$$

y una condición necesaria para que el dicho funcional presente un extremo (mínimo, máximo o punto de silla) en $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ es que la derivada $\delta\mathbb{F}(\mathbf{u};\delta\mathbf{u})$ sea nula para todas las direcciones $\delta\mathbf{u}$:

$$\boxed{\delta\mathbb{F}(\mathbf{u};\delta\mathbf{u})=\mathbf{0} \quad \forall\delta\mathbf{u} \quad |\ \delta\mathbf{u}|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u}=\mathbf{0}} \tag{11.7}$$

Expresando la ecuación (11.7) en el formato de la ecuación (11.3), se tendrá:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Principio variacional :}\\ \delta\mathbb{F}(\mathbf{u};\delta\mathbf{u})=\int_\Omega \mathbb{E}\cdot\delta\mathbf{u}\,d\Omega+\int_{\Gamma_\sigma}\mathbb{T}\cdot\delta\mathbf{u}\,d\Gamma=0 \quad \begin{cases}\forall\delta\mathbf{u}\\ \delta\mathbf{u}|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u}=\mathbf{0}\end{cases}\end{array}} \tag{11.8}$$

Observación 11-3

Lema fundamental del Cálculo Variacional:

Dadas $\mathbb{E}(\mathbf{x}):\Omega\to\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{T}(\mathbf{x}):\Gamma_\sigma\to\mathbb{R}^m$ que cumplen

$$\int_\Omega \mathbb{E}(\mathbf{x})\cdot\delta\mathbf{u}\ d\Omega+\int_{\Gamma_\sigma}\mathbb{T}(\mathbf{x})\cdot\delta\mathbf{u}\,d\Gamma=0 \quad \forall\delta\mathbf{u}\ ;\delta\mathbf{u}|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u}=\mathbf{0}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbb{E}(\mathbf{x})=\mathbf{0} & \forall\mathbf{x}\in\Omega\\ \mathbb{T}(\mathbf{x})=\mathbf{0} & \forall\mathbf{x}\in\Gamma_\sigma\end{cases}}$$

Demostración (indicativa): Consideremos la siguiente elección para $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$:

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})=\begin{cases}\mathbb{E}(\mathbf{x}) & \forall\mathbf{x}\in\Omega\\ \mathbf{0} & \forall\mathbf{x}\in\Gamma_u\\ \mathbb{T}(\mathbf{x}) & \forall\mathbf{x}\in\Gamma_\sigma\end{cases}$$

Substituyendo :

$$\int_\Omega \underbrace{\mathbb{E}(\mathbf{x})\cdot\mathbb{E}(\mathbf{x})}_{\ge0}\ d\Omega+\int_{\Gamma_\sigma}\underbrace{\mathbb{T}(\mathbf{x})\cdot\mathbb{T}(\mathbf{x})}_{\ge0}d\Gamma=0 \quad \Leftrightarrow\mathbb{E}(\mathbf{x})=\mathbb{T}(\mathbf{x})=\mathbf{0} \quad c.q.d.$$

NOTA

Esta demostración no es rigurosa y se proporciona únicamente como indicación intuitiva de la línea de razonamiento que sigue la demostración del Lema.

A la ecuación (11.8) se la denomina *Principio Variacional* y, puesto que $\delta\mathbf{u}$ es arbitrario, de acuerdo con la Observación 11-3 es totalmente equivalente a:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ecuaciones de}\\ \text{Euler - Lagrange}\end{array}\ \to\mathbb{E}(\mathbf{x},\mathbf{u}(\mathbf{x}),\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}))=\mathbf{0} \quad \forall\mathbf{x}\in\Omega} \tag{11.9}$$

NOTA

En un lenguaje estricto la ecuación (11.8) es una *ecuación variacional* o la forma débil de un problema diferencial.

$$\boxed{\text{Condiciones de contorno naturales} \rightarrow \mathbb{T}(\mathbf{x},\mathbf{u}(\mathbf{x}),\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma} \tag{11.10}$$

Observación 11-4

Las ecuaciones (11.9):

$$\mathbb{E}(\mathbf{x},\mathbf{u}(\mathbf{x}),\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

son, en general, un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP's) que reciben el nombre de *Ecuaciones de Euler-Lagrange* del Principio variacional (11.8).

Las ecuaciones (11.10) :

$$\mathbb{T}(\mathbf{x},\mathbf{u}(\mathbf{x}),\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma$$

constituyen un conjunto de condiciones de contorno sobre estas ecuaciones diferenciales denominadas *condiciones de contorno naturales*. Junto con las condiciones (11.1):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u$$

denominadas *condiciones de contorno forzadas (esenciales) o de Dirichlet*, definen un sistema cuya solución $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ es un extremo del funcional $\mathbb{F}$.

Ejemplo 11-4 – *Sea el funcional del Ejemplo 11-3:*

$$\mathbb{F}(u) = \int_a^b \phi[x,u(x),u'(x)]dx \quad \text{con} \quad u(x)\big|_{x=a} = u(a) = p$$

Obtener sus ecuaciones de Euler-Lagrange y las correspondientes condiciones de contorno naturales y forzadas.

Resolución:

Del resultado del Ejemplo 11-3:

$$\delta\mathbb{F}(u;\underset{\sim}{\delta u}) = \int_a^b \left[\frac{\partial\phi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u'}\right)\right]\delta u\,dx + \left.\frac{\partial\phi}{\partial u'}\right|_{x=b}\delta u_b$$

se obtiene directamente:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ecuación de Euler - Lagrange} \rightarrow \mathbb{E}(x,u,u') \equiv \dfrac{\partial\phi}{\partial u} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial u'}\right) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \\ \text{Condiciones de contorno naturales} \rightarrow \mathbb{T}(x,u,u') \equiv \left.\dfrac{\partial\phi}{\partial u'}\right|_{x=b} = 0 \\ \text{Condiciones de contorno forzadas} \rightarrow u(x)\big|_{x=a} = u(a) = p\end{array}}$$

11.2 Principio (Teorema) de los trabajos virtuales

Consideremos un volumen material de medio continuo V_t, ocupando en el instante t el volumen del espacio V, sometido a las fuerzas másicas $\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$ y a las fuerzas superficiales $\mathbf{t}^*(\mathbf{x},t)$ sobre el contorno Γ_σ (ver Figura 11-2). Consideremos también el espacio funcional $\mathbb{V}$ de todos los *desplazamientos admisibles* (que cumplen la condición de contorno ($\mathbf{u}|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u} = \mathbf{u}^*$):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Espacio de}\\ \text{desplazamientos}\\ \text{admisibles}\end{array}\right\} \rightarrow \mathbb{V} := \{\mathbf{u}_t(\mathbf{x}) : V \rightarrow \mathbb{R}^3 \;\; | \;\; \mathbf{u}_t(\mathbf{x})\big|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u} = \mathbf{u}_t^*(\mathbf{x})\} \tag{11.11}$$

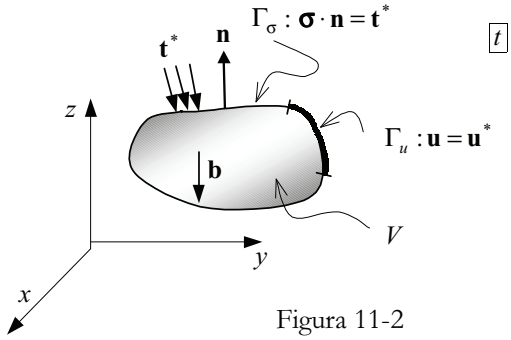


Figura 11-2

Dos de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del medio son la ecuación de Cauchy y la ecuación de equilibrio en el contorno Γ_σ:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \rho\left(\mathbf{b} - \mathbf{a}(\mathbf{u})\right) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in V \rightarrow \text{Ecuación de Cauchy} \tag{11.12}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} - \mathbf{t}^* = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma \rightarrow \text{Ecuación de equilibrio en el contorno} \tag{11.13}$$

donde se ha considerado la dependencia implícita de las tensiones con los desplazamientos (a través de las deformaciones y de la ecuación constitutiva $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$) y la de las aceleraciones con los desplazamientos (a través de la ecuación $\mathbf{a}(\mathbf{x},t) = \dfrac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{\partial t^2}$).

Consideremos ahora el siguiente principio variacional:

$$\delta\mathbb{W}(\mathbf{u};\delta\mathbf{u}) = \int_V \underbrace{\left[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \rho\left(\mathbf{b} - \mathbf{a}(\mathbf{u})\right)\right]}_{\mathbb{E}}\cdot\delta\mathbf{u}\, dV + \int_{\Gamma_\sigma} \underbrace{\left[\mathbf{t}^* - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}\right]}_{\mathbb{T}}\cdot\delta\mathbf{u}\, d\Gamma = 0 \qquad \forall\,\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) \;\; | \;\; \delta\mathbf{u}\big|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u} = \mathbf{0} \tag{11.14}$$

donde a las perturbaciones de los desplazamientos $\delta\mathbf{u}$ se las denomina *desplazamientos virtuales*:

$$\text{Desplazamientos virtuales} : \rightarrow \delta\mathbf{u} : V \rightarrow \mathbb{R}^3 \;\; ; \;\; \delta\mathbf{u}\big|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u} = \mathbf{0} \tag{11.15}$$

A la vista de las ecuaciones (11.8) y (11.9), las ecuaciones de Euler-Lagrange del Principio variacional (11.14) y sus condiciones de contorno naturales son:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ecuaciones de}\\ \text{Euler - Lagrange}\end{array} \rightarrow \mathbb{E} \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \rho(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x}\in\Omega \\ \\ \begin{array}{l}\text{Condiciones de}\\ \text{contorno naturales}\end{array} \rightarrow \mathbb{T} \equiv \mathbf{t}^* - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x}\in\Gamma_\sigma} \tag{11.16}$$

es decir, la ecuación de Cauchy (11.12) y la ecuación de equilibrio en el contorno (11.13).

El principio variacional (11.14) puede ser reescrito en forma totalmente equivalente como sigue. Considerando el término:

$$\begin{cases}(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\delta\mathbf{u} = \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}:(\nabla\otimes\delta\mathbf{u}) = \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}:(\delta\mathbf{u}\otimes\nabla) \\ \dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}\delta u_j = \dfrac{\partial(\sigma_{ij}\delta u_j)}{\partial x_i} - \sigma_{ij}\dfrac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial(\sigma_{ij}\delta u_j)}{\partial x_i} - \sigma_{ji}\dfrac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} \quad i,j\in\{1,2,3\}\end{cases} \tag{11.17}$$

y descomponiendo $\delta\mathbf{u}\otimes\nabla$ en su parte simétrica, $\nabla^s\delta\mathbf{u}$, y su parte antisimétrica $\nabla^a\delta\mathbf{u}$:

$$\begin{cases}\delta\mathbf{u}\otimes\nabla = \nabla^s\delta\mathbf{u} + \nabla^a\delta\mathbf{u} \\ \nabla^s\delta\mathbf{u} \overset{def}{=} \dfrac{1}{2}\left[\delta\mathbf{u}\otimes\nabla + \nabla\otimes\delta\mathbf{u}\right] \\ \nabla^a\delta\mathbf{u} \overset{def}{=} \dfrac{1}{2}\left[\delta\mathbf{u}\otimes\nabla - \nabla\otimes\delta\mathbf{u}\right]\end{cases} \tag{11.18}$$

Substituyendo la ecuación (11.18) en la ecuación (11.17):

RECORDATORIO

El tensor $\boldsymbol{\sigma}$ es simétrico y el tensor $\nabla^a\delta\mathbf{u}$ es antisimétrico. En consecuencia, su producto es nulo ($\boldsymbol{\sigma}:\nabla^a\delta\mathbf{u} = 0$)

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\delta\mathbf{u} = \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}:(\delta\mathbf{u}\otimes\nabla) = \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}:\nabla^s\delta\mathbf{u} - \underbrace{\boldsymbol{\sigma}:\nabla^a\delta\mathbf{u}}_{=\mathbf{0}} \tag{11.19}$$

$$\boxed{\Rightarrow (\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\delta\mathbf{u} = \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}:\nabla^s\delta\mathbf{u}} \tag{11.20}$$

Integrando ahora la ecuación (11.20) sobre el dominio V y aplicando el teorema de la divergencia se tiene:

$$\begin{aligned}&\int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\delta\mathbf{u}\cdot\, dV = \int_V \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\mathbf{u})\,dV - \int_V \left[\boldsymbol{\sigma}:\nabla^s\delta\mathbf{u}\right]dV = \\ &= \int_{\partial V=\Gamma_u\cup\Gamma_\sigma} \mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\mathbf{u})\,dV - \int_V \left[\boldsymbol{\sigma}:\nabla^s\delta\mathbf{u}\right]dV = \\ &= \int_{\Gamma_u} (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\underbrace{\delta\mathbf{u}}_{=\mathbf{0}}\,dV + \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\delta\mathbf{u}\,dV - \int_V \left[\boldsymbol{\sigma}:\nabla^s\delta\mathbf{u}\right]dV \Rightarrow\end{aligned} \tag{11.21}$$

$$\boxed{\int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\delta\mathbf{u}\cdot\, dV = \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\delta\mathbf{u}\,dV - \int_V \left[\boldsymbol{\sigma}:\nabla^s\delta\mathbf{u}\right]dV} \tag{11.22}$$

donde se han tenido en cuenta la condición $\delta\mathbf{u}\big|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u} = \mathbf{0}$ (ver ecuación (11.15)).

Finalmente, substituyendo la ecuación (11.20) en la forma original del Principio variacional (11.14) se obtiene:

$$\begin{aligned}\delta\mathbb{W}(\mathbf{u};\delta\mathbf{u}) &= \int_V [\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \rho(\mathbf{b}-\mathbf{a})]\cdot\delta\mathbf{u}\ dV + \int_{\Gamma_\sigma}(\mathbf{t}^* - [\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}])\cdot\delta\mathbf{u}\, d\Gamma = \\ &= \int_V [\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}]\cdot\delta\mathbf{u}\, dV + \int_V \rho(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\delta\mathbf{u}\ dV + \int_{\Gamma_\sigma}\mathbf{t}^*\cdot\delta\mathbf{u}\, d\Gamma - \int_{\Gamma_\sigma}[\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}]\cdot\delta\mathbf{u}\, d\Gamma = \\ &= -\int_V [\boldsymbol{\sigma}:\nabla^s\delta\mathbf{u}]dV + \int_V \rho(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\delta\mathbf{u}\ dV + \int_{\Gamma_\sigma}\mathbf{t}^*\cdot\delta\mathbf{u}\, d\Gamma = 0 \Rightarrow\end{aligned} \tag{11.23}$$

Principio de los Trabajos Virtuales

$$\delta\mathbb{W}(\mathbf{u};\delta\mathbf{u}) = \int_V \rho(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\delta\mathbf{u}\ dV + \int_{\Gamma_\sigma}\mathbf{t}^*\cdot\delta\mathbf{u}\, d\Gamma - \int_V [\boldsymbol{\sigma}:\nabla^s\delta\mathbf{u}]dV = 0 \tag{11.24}$$

$$\forall\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) \ \mid\ \delta\mathbf{u}|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u} = \mathbf{0}$$

La expresión (11.24), que es totalmente equivalente al Principio variacional original y sigue teniendo las mismas ecuaciones de Euler-Lagrange y condiciones de contorno (11.16), recibe el nombre de *Principio (*o Teorema*) de los Trabajos Virtuales* (P.T.V.).

Observación 11-5

El P.T.V. es un principio variacional muy aplicado en la Mecánica de Sólidos que puede interpretarse como la búsqueda de un extremo de un funcional del campo de desplazamientos $\mathbb{W}(\mathbf{u})$, no necesariamente conocido en forma explícita, cuya variación (derivada de Gateaux) $\delta\mathbb{W}(\mathbf{u};\delta\mathbf{u})$ es conocida y viene dada por la ecuación (11.14). Puesto que las ecuaciones de Euler-Lagrange del P.T.V. son la ecuación de Cauchy (11.12) y de equilibrio en el contorno (11.13), su imposición es totalmente equivalente (aunque más conveniente para la resolución del problema por métodos numéricos) a la imposición en forma local de aquellas ecuaciones y recibe el nombre de *forma débil* de las mismas.

Observación 11-6

En la formulación P.T.V. no interviene la ecuación constitutiva ni se distingue el tipo de cinemática (deformación finita o infinitesimal), por lo que su aplicación no se ve restringida ni por el tipo de ecuación constitutiva elegida (elástica, elastoplástica, de fluido etc.) ni por la cinemática (deformación finita o infinitesimal) considerada.

11.2.1 Interpretación del Principio de los Trabajos Virtuales

Consideremos el medio continuo en la configuración actual V_t a tiempo $\boxed{t}$ sometido a unas fuerzas másicas *ficticias* $\mathbf{b}^*(\mathbf{x},t) = \mathbf{b}(\mathbf{x},t) - \mathbf{a}(\mathbf{x},t)$ y a las fuerzas superficiales reales $\mathbf{t}^*(\mathbf{x},t)$ (ver Figura 11-3) y soportando las tensiones reales $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$. Consideremos, además, una configuración virtual (ficticia) $V_{t+\delta t}$

correspondiente al instante virtual $\boxed{t+\delta t}$ y separada de la configuración real por el campo de desplazamientos virtuales (11.15):

$$\boxed{\text{Desplazamientos virtuales}: \rightarrow \delta\mathbf{u}(\mathbf{x})\ ;\quad \delta\mathbf{u}\big|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u} = \mathbf{0}} \tag{11.25}$$

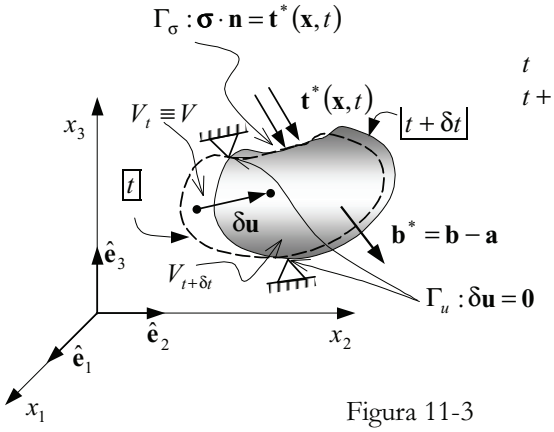


Figura 11-3

Admitiendo una *cinemática de deformación infinitesimal*, las deformaciones virtuales asociadas a los desplazamientos virtuales (11.25) serían:

$$\boxed{\text{Deformaciones virtuales}: \rightarrow \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \delta\mathbf{u}} \tag{11.26}$$

y suponiendo que las tensiones $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$ permanecen constantes en el intervalo de tiempo $[t, t+\delta t]$ el trabajo de deformación virtual (*Trabajo Virtual Interno*) realizado por el medio durante dicho intervalo será:

$$\boxed{\left.\begin{matrix}\text{Trabajo}\\ \text{Virtual}\\ \text{Interno}\end{matrix}\right\} \rightarrow \delta\mathbb{W}^{\text{int}} = \int_V [\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}]\, dV = \int_V \left[\boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \delta\mathbf{u}\right] dV} \tag{11.27}$$

Asimismo, suponiendo que tanto las pseudo fuerzas másicas $\mathbf{b}^*(\mathbf{x},t)$ como las fuerzas superficiales $\mathbf{t}^*(\mathbf{x},t)$ permanecen constantes durante el proceso de deformación virtual en el intervalo $[t, t+\delta t]$, el trabajo realizado por las mismas (*Trabajo Virtual Externo*) resulta ser:

$$\boxed{\left.\begin{matrix}\text{Trabajo}\\ \text{Virtual}\\ \text{Externo}\end{matrix}\right\} \rightarrow \delta\mathbb{W}^{ext} = \int_V \rho\ \underbrace{(\mathbf{b}-\mathbf{a})}_{\mathbf{b}^*} \cdot \delta\mathbf{u}\ dV + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta\mathbf{u}\, d\Gamma} \tag{11.28}$$

y de la comparación del P.T.V. en la ecuación (11.24) con las ecuaciones (11.27) y (11.28), el P.T.V. puede ser interpretado como:

Principio de los Trabajos Virtuales

$$\underbrace{\delta\mathbb{W}}_{\substack{\text{Trabajo}\\ \text{Virtual}\\ \text{Total}}} = \underbrace{\int_V [\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}]\, dV}_{\substack{\text{Trabajo Virtual}\\ \text{Interno } (\delta\mathbb{W}^{\text{int}})}} \underbrace{- \left[\int_V \rho(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\delta\mathbf{u}\, dV + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^*\cdot\delta\mathbf{u}\, d\Gamma \right]}_{\substack{\text{Trabajo Virtual}\\ \text{Externo } (\delta\mathbb{W}^{ext})}} = 0 \Rightarrow$$

$$\delta\mathbb{W} = \delta\mathbb{W}^{\text{int}} - \delta\mathbb{W}^{ext} = 0$$

para todo cambio de configuración virtual

cinemáticamente admisible $(\delta\mathbf{u}|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u} = \mathbf{0})$ (11.29)

11.2.2 Principio de los Trabajos Virtuales en función de los vectores de tensión y de deformación

De los *tensores* simétricos de tensión, $\boldsymbol{\sigma}$, y de deformación virtual, $\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s\delta\mathbf{u}$, de la ecuación (11.29), pueden extraerse los *vectores* de tensión $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ y de deformación virtual $\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}$:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}\in\mathbb{R}^6 \;;\; \{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \qquad \{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}\in\mathbb{R}^6 \;;\; \{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\} \overset{not}{=} \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_x \\ \delta\varepsilon_y \\ \delta\varepsilon_z \\ \delta\gamma_{xy} \\ \delta\gamma_{xz} \\ \delta\gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_x \\ \delta\varepsilon_y \\ \delta\varepsilon_z \\ 2\delta\varepsilon_{xy} \\ 2\delta\varepsilon_{xz} \\ 2\delta\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} \tag{11.30}$$

que satisfacen la igualdad:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \{\boldsymbol{\sigma}\}\cdot\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}\cdot\{\boldsymbol{\sigma}\} \\ \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} = \sigma_m\delta\varepsilon_m = \delta\varepsilon_m\sigma_m \end{cases} \quad \begin{cases} i,j\in\{1,2,3\} \\ m\in\{1,\ldots 6\} \end{cases} \tag{11.31}$$

Substituyendo la ecuación (11.31) en la expresión (11.29) del P.T.V., se obtiene:

Principio de los Trabajos Virtuales en vectores de tensión y deformación

$$\underbrace{\delta\mathbb{W}}_{\substack{\text{Trabajo}\\ \text{Virtual}\\ \text{Total}}} = \underbrace{\int_V \{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}\cdot\{\boldsymbol{\sigma}\}\, dV}_{\substack{\text{Trabajo Virtual}\\ \text{Interno } (\delta\mathbb{W}^{\text{int}})}} \underbrace{- \left[\int_V \rho(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\delta\mathbf{u}\, dV + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^*\cdot\delta\mathbf{u}\, d\Gamma \right]}_{\substack{\text{Trabajo Virtual}\\ \text{Externo } (\delta\mathbb{W}^{ext})}} = 0 \Rightarrow$$

$$\delta\mathbb{W} = \delta\mathbb{W}^{\text{int}} - \delta\mathbb{W}^{ext} = 0$$

para todo cambio de configuración virtual

cinemáticamente admisible $(\delta\mathbf{u}|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u} = \mathbf{0})$ (11.32)

que constituye la forma del P.T.V. más utilizada en ingeniería

11.3 Energía potencial. Principio de minimización de la energía potencial

El funcional $\mathbb{W}$, en términos del cual se establece el Principio Variacional de la ecuación (11.24), sólo puede formularse *explícitamente* bajo ciertas circunstancias. Uno de los casos en los que puede hacerse es el siguiente:

1) *Problema elástico lineal*

En este caso la ecuación constitutiva puede escribirse a partir del potencial elástico $\hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})$ como:

NOTA

La restricción al problema elástico lineal puede hacerse menos estricta y extenderse al caso de materiales *hiperelásticos* en régimen de deformación finita.

$$\text{Potencial elástico} \;\rightarrow\; \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \underbrace{\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \frac{\partial \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \tag{11.33}$$

2) *Las fuerzas de volumen* $\rho\,\mathbf{b}^*(\mathbf{x},t)$ *son conservativas*

Es decir, dichas fuerzas de volumen derivan de un potencial $\phi(\mathbf{u})$ y por lo tanto puede escribirse:

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = -\rho \mathbf{b}^* = -\rho\left(\mathbf{b} - \mathbf{a}\right) \tag{11.34}$$

Observación 11-7

Un caso típico de fuerzas de volumen conservativas se obtiene para el caso cuasiestático ($\mathbf{a} = \mathbf{0}$) bajo fuerzas gravitatorias y densidad constante:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x},t) \equiv \{0, \quad 0, \quad -g\}^T = cte. \quad ; \quad \rho(\mathbf{x},t) = cte.$$

En dicho caso el potencial de fuerzas de volumen tiene la expresión:

$$\phi(\mathbf{u}) = -\rho\, \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = -\rho\, \mathbf{b}$$

3) *Las fuerzas de superficie* $\mathbf{t}^*(\mathbf{x},t)$ *son conservativas*

Por lo tanto, derivan de un potencial $G(\mathbf{u})$ tal que:

$$\mathbf{t}^* = -\frac{\partial G(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \tag{11.35}$$

Observación 11-8

Un caso típico de fuerzas superficiales conservativas ocurre cuando el vector tracción $\mathbf{t}^*(\mathbf{x},t)$ *es independiente de los desplazamientos* ($\frac{\partial \mathbf{t}^*}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$). En dicho caso el potencial de fuerzas superficiales tiene la expresión:

$$\boxed{G(\mathbf{u}) = -\mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u}} \qquad \Rightarrow \quad \frac{\partial G(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = -\mathbf{t}^*$$

En las circunstancias anteriores puede definirse el siguiente funcional denominado *Energía Potencial* total:

Energía potencial :

$$\underbrace{\mathbb{U}(\mathbf{u})}_{\text{Energía potencial total}} = \underbrace{\int_V \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))\, dV}_{\text{Energía elástica}} + \underbrace{\int_V \phi(\mathbf{u}) dV}_{\text{Energía potencial de las fuerzas másicas}} + \underbrace{\int_{\Gamma_\sigma} G(\mathbf{u}) d\Gamma}_{\text{Energía potencial de las fuerzas superficiales}} \tag{11.36}$$

cuya variación de Gateaux será:

$$\delta\mathbb{U}(\mathbf{u};\delta\mathbf{u}) = \int_V \underbrace{\frac{\partial \hat{u}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}}_{\boldsymbol{\sigma}} : \underbrace{\nabla^S(\delta\mathbf{u})}_{\delta\boldsymbol{\varepsilon}}\, dV + \int_V \underbrace{\frac{\partial \phi(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}}_{-\rho(\mathbf{b}-\mathbf{a})} \cdot \delta\mathbf{u}\, dV + \int_{\Gamma_\sigma} \underbrace{\frac{\partial G(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}}_{-\mathbf{t}^*} \cdot \delta\mathbf{u}\, d\Gamma =$$

$$= \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV - \int_V \rho(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{u}\, dV - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta\mathbf{u}\, d\Gamma \qquad \forall \delta\mathbf{u} \;\; |\delta\mathbf{u}|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u} = \mathbf{0} \tag{11.37}$$

donde se han considerado las ecuaciones (11.33) a (11.35). Comparando la ecuación (11.37) con el P.T.V. (11.29), se llega a:

$$\delta\mathbb{W} \equiv \delta\mathbb{U}(\mathbf{u};\delta\mathbf{u}) = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV - \int_V \rho(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{u}\, dV - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta\mathbf{u}\, d\Gamma = 0$$
$$\forall \delta\mathbf{u} \;\; |\delta\mathbf{u}|_{\mathbf{x}\in\Gamma_u} = \mathbf{0} \tag{11.38}$$

NOTA

La condición de mínimo del extremo se demuestra a partir del requerimiento termodinámico de que $\mathbb{C}$ sea definido positivo (ver capítulo 6).

Observación 11-9

Principio de minimización de la Energía Potencial:

El principio variacional (11.38), que sigue siendo la forma débil de las ecuaciones de Cauchy (11.12) y de equilibrio en el contorno (11.13), es ahora la variación de Gateaux del funcional *energía potencial* $\mathbb{U}(\mathbf{u})$ de la ecuación (11.36). En consecuencia, dicho funcional, que para el caso de fuerzas másicas y superficiales constantes tiene la forma:

$$\mathbb{U}(\mathbf{u}) = \int_V \underbrace{\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}}_{\hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}\, dV - \int_V \rho(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}\, dV - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u}\, d\Gamma$$

presenta un extremo (que puede demostrarse que es un mínimo) para la solución del problema elástico lineal.

Bibliografía

Bonet, J. And R.D. Wood, *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis,* Cambridge University Press, 1997

Chadwick, P., *Continuum Mechanics,* Wiley, 1976

Chung, T.J., *Continuum mechanics,* Pretice-Hall International Editions, 1988

Coirier, J., *Mécanique des milieux continus,* Dunod, Paris 1997

Eringen, A.C., *Mechanics of Continua*, Wiley, 1967

Fung, Y.C., *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice Hall, 1965

Green, A.E. and W. Zerna, *Theoretical Elasticity,* Clarendon Press, 1960

Malvern, L.E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, 1969

Massaguer, J.M. y A. Falqués, *Mecánica del continuo. Geometría y Dinámica,* Edicions UPC, 1994

Prager, W., *Introduction to Mechanics of Continua,* Ginn and Co., 1961

Spencer, A.J.M., *Continuum Mechanics*, Longman, 1980

Truesdell, C.S., *The Elements of Continuum Mechanics*, Springer, 1966